模糊数学及其应用

〔日〕水本雅晴 著

科 学 出 版 社

模糊数学及其应用

〔日〕水本雅晴 著

刘凤璞　王铭文　解思泽 编译

马忠林　刘凤璞 校

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是根据日本《数理科学》杂志连载"FUZZY 代数とその応用"一文编译而成的.

本书对模糊数学的基本概念和理论进行了比较全面的介绍，叙述严谨、循序渐进、明瞭易懂，便于读者掌握. 主要内容有模糊集、模糊事件的概率、模糊拓扑空间、模糊矩阵、模糊逻辑、模糊系统、模糊语言、模糊意向判决等.

本书可供有关专业的科技工作者和大专院校师生参考.

模糊数学及其应用

〔日〕水本雅晴 著

刘凤璞　王铭文　解恩泽 编译

马忠林　刘凤璞 校

责任编辑，杨贤英　苏劳霞

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1986年9月第一版　开本：787×1092 1/32

1986年9月第一次印刷　印张：10 3/4

印数：0001—11,600　字数：243,000

统一书号：13031·3278

本社书号：4649·13—1

定价：2.55 元

编 译 者 序

本书是根据日本大阪大学水本雅晴先生1970～1973年陆续发表在日本《数理科学》上的《Fuzzy 代数とその応用》编译而成的. 原书写得很有特色，既有较新内容及作者的独到见解，又通俗易懂，便于读者掌握，因此，我们决定把它编译成书，介绍给我国的读者. 书名按原文应译为《模糊代数及其应用》，但是考虑到本书的内容包括了模糊集、模糊矩阵、模糊概率、模糊拓扑、模糊逻辑、模糊系统、模糊语言、模糊意向判决等许多部分，它涉及到数学的很多分支学科，因而在编译时把书名改为《模糊数学及其应用》.

本书正文基本上是按原文译的. 但是，有如下一些改动:

1. 由于原文是在杂志上陆续发表的，先后共刊登25期，各期之间都有前后衔接性的语句或段落，而我们的译文是把它作为完整的一部书来处理的，因而对那些衔接性的语句或段落都作了必要的删改;

2. 原文在《数理科学》连载时，为了照顾初学的读者，在各章或每期的开头，常常写了一些对前文进行复习的内容. 编译时我们把这些复习性质的段落基本上删除了，相应的一些公式、图表的序号也作了变动;

3. 原文中对一部分概念和命题加述了相当长的[注意]、[注释]，对这类[注意]、[注释]都酌情编入了正文;

4. 在原文的叙述中，有些中国读者不习惯的、不熟悉的事例，编译时酌情作了一些修改;

5. 除原文外，在编译时还编入一个绪论和一个附录.

鉴于以上五个方面的变动，本书已不是原文的原原本本的"译本"了，而成为了"编译本"，这是我们应当向读者说明的。

编译时对原文中的笔误或印刷错误，都一律直接改正而不另加注释。

对于模糊理论的系统研究，是从1965年美国的 L. A. 查德教授发表"模糊集"（Fuzzy sets）一文开始的。十多年来模糊理论发展非常迅速，现在依然方兴未艾。1978年由北荷兰社创办了《国际模糊集合与系统杂志》，水本先生是这一国际性刊物的编辑之一。1979年水本先生在《数理科学》(5月号)上发表的综述性论文：《模糊理论的世界动态》，对1965年至1979年的十四年间世界各国研究模糊理论的概貌，作了系统的介绍。其中包括模糊理论研究成果增长的速度、国际性专业学术会议的召开、专业书刊杂志的出版、研究课题涉及的领域以及研究人员的分布状况等，研究模糊理论的人，了解这些情况是很有益的。因此，我们把它作为绪论收人本书之中。但是，在水本先生发表这篇综述性论文时，中国对模糊数学的研究还刚刚开始，未能引起国际模糊数学界的注意。现在情况已经发生了很大的变化，十年内乱刚刚过去，关肇直先生就在几次会议上宣传过这门新学科，认为这是数学发展的新动向之一，值得注意。在关肇直先生等老一辈数学家的鼓励下，在蒲保明先生亲自带动下，从七十年代后期，国内便开始了模糊集论的研究和应用，并作了大量的普及工作。短短几年的时间，已经形成了一支人数可观的研究队伍。1983年正式成立了"中国模糊数学与模糊系统学会"（隶属于中国系统工程学会），创办了自己的《模糊数学》杂志(由华中工学院主办)，国内已出版了自己编写的书籍三本，译著三本，理论研究不断深入，实际应用遍及医学、气象、农林、生物、环境、石油、地质、

地理、化学、心理、语言、经济、教育、体育等诸多的研究领域，有些已取得初步成效。模糊数学已经在祖国的大地上播了种，正在扎根，等待着开花、结果。国内的发展，引起了国际同行的重视，L. A. 查德教授在为我国《模糊数学》杂志所作的前言中说："《模糊数学》杂志在中华人民共和国首次出版是一件大事，其重要性已经超越了一个国家的疆界，这本刊物的问世，在一定程度上反映了中国存在着一支研究模糊集论及其应用的宏大、活跃并正在迅速发展的队伍。"1983年"模糊信息与决策分析"会议主席 E. Sanchez 博士把中国列为少数几个模糊集论发展的国家之一，国际性杂志"模糊集与系统"和法国的交流快报"模糊集与应用"都有中国的编委和通讯员，中国代表出席了近几次重要的国际学术会议，并享受到程序委员会委员、分组会议主席、大会报告及讲学等各种荣誉。

由于模糊数学的历史很短，它尚未成熟，尚未形成自己的理论体系，在实用方面也还在酝酿着新的突破，国内在与信息革命相结合的应用方面，同国外相比也还有一定的差距，因此，我们还必须大力开展模糊理论的研究工作，迅速缩短这一差距。

就世界范围而言，模糊理论的研究，仍在迅速发展着，新的研究成果不断涌现。作为示例，我们把塚本弥八郎先生发表于1979年5月号《数理科学》上的《论模糊推理》一文作为本书的附录介绍给读者。

汪培庄同志审阅了本书的全稿，并提出了许多宝贵意见，给我们提供了我国模糊数学研究进展的许多重要情况，我们谨向汪培庄同志深致谢意。

在编译过程中，马忠林同志作了认真的校订，给予了很大帮助，谨此致谢。

由于我们水平所限，编译中会有许多不妥之处，敬请读者批评指正。

编 译 者

1984 年 6 月

目　录

绪　论

模糊理论研究的世界动态

1965年，加利福尼亚大学的 L. A. 查德教授[1]发表了题为“模糊集”(Fuzzy sets) 的论文. 从此，“模糊”(fuzziness) 的概念便问世了. 在提出“模糊”这个概念的很久以前，对不分明性的概念就已经作过定性的处理，并且还广泛地运用概率(即随机性概念)这种定量的方法进行了研究. 但是，那时所使用的不是“fuzziness”，而是“vagueness”，“ambivalence”，“ambiguity”等词. 然而，运用随机性概念是处理不了存在于现实中的所有不分明现象的(实际上，本来作为对象的不分明事件不是概率事件，但却毫无道理地用概率的方法来进行处理，这样的事例是屡见不鲜的)，于是，作为研究某些不分明现象的定量处理方法——模糊集的概念便出现了.

从模糊集概念提出以来，对它的批评也是很多的. 这种批评多数是来自以概率为工具进行研究的人们. 例如，他们提出“隶属函数是怎样确定的?”“如果模糊概念可以用概率来表示. 那么它与概率还有什么区别?”“它是一种理论上的游戏，在实际中有什么用处呢?”等等. 确实，怎样来确定隶属函数的问题是很困难的（这是在学术界刚刚提出模糊集时必然会出现的问题，但最近或许是因为想通了，或许是由于

---

1) L. A. 查德教授是在俄罗斯巴库出生的伊朗人，德黑兰大学毕业（1942年)后，曾到美国哥伦比亚大学、普林斯顿高等研究所、加利福尼亚大学从事研究工作，是人们熟知的系统论专家.

模糊理论已经渗透到各个方面，这种问题几乎没有了）。以前的确定方法，可以说是表现为模糊集的那种东西，是在合理的范围内来确定其隶属函数的。对此，虽然用合理的主观想象，能提出若干方案，但是还没有能具体地给出适用的算法。这个问题，只要是人类没有变成"机器"，今后还是不能一劳永逸地获得彻底解决。像这样反对"模糊"的意见尽管有许多，但因为模糊事件在现实中确实存在，所以模糊集的概念仍引起世界各国学者的兴趣，并逐步发表了研究成果。最近从产业界方面看，对模糊概念也引起了注视，并对名曰"不分明工程学"寄以很大的希望。图 1 表示出了到 1976 年中期为止按年代顺序世界各国发表的论文数量。从这个图可知，这样的论文数量是按指数函数的规律增加的，现在也没有降低这个速度(实际上，1968 年大家刚开始研究模糊集论的时候，仅有的几篇论文可以慢慢地来阅读，但是，最近平均每一周都能看到一两篇新论文，不用说阅读，就是要进行清理也恐怕是不易办到的)。这个图是据根《机器人》杂志(1977 年第 9 期第 1—68 页) 发表的 B. R. 盖涅斯、I. J. 科豪特：《模糊理论十年：模糊系统及有关研究课题的文献目录》[其中有从 1965 年到 1976 年中期的论文目录 (763 条) 和解说] 制作的。到 1979 年，据估计，即使不能说有 1500 篇，也总可肯定足有 1000 篇论文发表。还有，由日本人写的论文也多达 150 篇。另外，在 A. 康德尔、W. J. 毕阿特：《模糊集、模糊代数与模糊统计学》(电气与电子工程学会 1978 年会议公报，第 66 期，第 1619—1639 页) 中有 570 篇关于模糊论文的明细表。

由上可见，各国学者对模糊集及其应用有极大的兴趣。在各国召开这方面的国际会议也是很多的。大的国际会议有把模糊理论作为组成部分的情况，也有纯粹关于模糊理论的会议。近期，这种类型的会议，每年召开五、六次。下面列出到

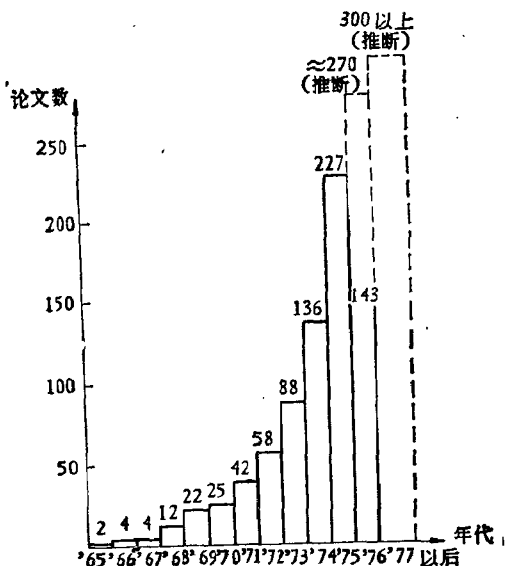


图 I 与模糊理论有关的论文数的变化[根据盖涅斯和科豪特的文章(1977)，但虚线部分是根据作者的推断]

1979 年为止召开的国际会议的一览表：

顺序	会 议 名 称	地 点	时 间
1	国际自动控制委员会第三次系统参数估计与识别座谈会(模糊环境的估计与控制)	德尔夫特	1973年 6 月11—15日
2	美国-日本模糊集及其应用讨论会	伯克利	1974年 7 月1—4日
3	国际自动控制委员会(每三年召开一次的)世界专业会议(模糊自动机和判别程序)	波士顿	1975年 8 月24—30日
4	同上(模糊判决要素及其应用)	赫尔辛基	1978年 6 月12—16日
5	国际控制论与系统(模糊系统)专业会议	布加勒斯特	1975年 8 月25—29日
6	同上	阿姆斯特丹	1978年 8 月21—25日
7	讲授和讨论关于模糊子集理论及其多方面应用的学术会议	阿列斯	1976年 5 月24—26日

续 表

顺序	会 议 名 称	地 点	时 间
8	国际控制论与社会讨论会（模糊集论及其应用）	华盛顿	1976年 11月1—3日
9	同上	华盛顿	1977年 9月19—21日
10	同上 （模糊集与系统）	东 京	1978年 11月3—7日
11	美国运筹学学会联合会议（管理科学的模糊模式）	迈阿密海滩	1976年 11月3—6日
12	同上 （模糊集与系统分析）	阿特兰塔	1977年 11月7—9日
13	同上 （模糊集）	纽 约	1978年 5月1—3日
14	同上 （管理判决要素的模糊形式）	洛杉机	1978年 11月13—15日
15	普通系统论研究会 1977 年年会(模糊集与近似推理)	丹凡尔	1977年 2月20日
16	国际第七次多值逻辑讨论会(模糊逻辑)	查劳特	1977年 5月24—27日
17	世界第一次应用数学讨论会(模糊集)	巴塞罗纳	1977年 7月11日
18	美国电机和电子工程学会判决与控制讨论会(模糊集论及其应用)	新奥尔良	1977年 12月6—9日
19	同上	圣地亚哥	1979年 1月10—12日
20	第三次模糊推理及其应用会议	伦 敦	1978年 9月15日
21	国际模糊集论及其应用座谈会	马 赛	1978年 9月20—22日
22	欧洲科学团体第八次模糊集座谈会	阿姆斯特丹	1979年 4月9—11日
23	国际第六次人工智能讨论会(模糊推理)	东 京	1979年 8月20—24日

从一览表可以看出，模糊理论初次登上国际会议的舞台是在1973年，此后出现在二十多次国际会议上．在这样的形势下，关于模糊集及其应用的专业杂志——《国际模糊集与系统杂志》，从1978年起由北荷兰社创办，每年出版四期．封面很能反映它的内容，“Fuzzy”这个词印得模模糊糊．它登载国际模糊理论会议介绍和各地发表的论文目录．这个杂志有35名编辑，其中日本人有六名（田中、寺野、浅居、国井、菅野、水本）．除了这个杂志以外，常刊登有关模糊理论论文的还有下列一些杂志：

1.《信息科学》（爱尔维尔，北荷兰出版）；

2.《控制论杂志》（海米斯佩出版公司出版）；

3.《国际机器人杂志》（伦敦，学术出版社出版）；

4.《系统、人与控制论论文集》（美国电机和电子工程学会）；

5.《信息与控制》（纽约，学术出版社出版）；

6.《计算机与系统科学杂志》（纽约，学术出版社出版）．

同时，有关模糊理论的单行本也出版了许多．例如，

1.A．考夫曼：《模糊子集理论在设计中的应用导引》（巴黎、玛松出版）．

卷1.基本理论初步，1973年版，448页．[英译本：《模糊子集理论初步》（卷1.基本理论初步），纽约，学术出版社，1975年版，416页．]

卷2.在语言学、逻辑学和语义学上的应用，1975年版，248页．

卷3.在形状的分类和观察、自动机和系统、标准的选择等方面的应用，1975年版，320页．

卷4.补充和新的应用，1977年版，334页．

卷5.新的补充（预定）．

据作者考夫曼说，要写到卷 11.

2. L. A. 查德、K. S. 夫、K. 泰凯那、M. 希墨拉：《模糊集及其在认识和判决程序上的应用》（纽约，学术出版社，1975 年版，496 页）. 此书即为日美讨论会(2)的会议录.

3. C. V. 尼哥伊塔、D. A. 拉利斯库：《模糊集在系统分析中的应用》(纽约，哈尔斯特出版社，1976 年版，191 页).

4. H. 布塞尔、S. 克拉兹科、N. 穆勒：《社会科学中的系统论》（巴塞尔，比尔克豪塞尔出版，1976 年版，552 页）.

5. M. M. 葛塔、G. N. 萨里第斯、B. R. 盖涅斯：《模糊自动机与判决程序》（北荷兰，1977 年版，496 页）. 国际自动控制委员会讨论会会议录，1975 年.

6. W. 威尔勒：《自动机与语言学中的模糊概念》（柏林，阿卡德米-法莱格出版社，1978 年版，141 页）.

7. S. C. 利、A. 坎德尔：《模糊开关与自动机：理论与应用》(纽约，格兰尼、罗萨克出版，1978 年版).

8. C. V. 尼哥伊塔：《模糊系统》(阿贝克出版社，1978 年版).

9. M. M. 哥塔：《模糊集论及其应用的进展》（北荷兰，1979 年 11 月出版）.

10. B. 瑞格：《经验词义学》（1980 年版）.

1978 年，在日本也相继发行了单行本：

浅居、内高-塔等：《不分明系统论入门》（日本人和罗马尼亚人合著，涉及多方面的内容，是一部事例丰富、能够抓住模糊系统整体形象的良好的入门书），欧姆出版社，1978 年版，218 页.

西田、竹田：《模糊集及其应用》（重点集中在图论、意向判决、信息论等三个专题，这里也包括作者的创造，并作了详

表 1　在各领域中有关模糊概念的论文数[根据盖涅斯和科豪特的文章(1977)]

共　　计	(763篇)
自动机	65
模式识别	55
社会科学	49
语言学	49
控制论	46
概率论	45
意向判决	45
多值逻辑	38
开关电路	36
形式语言	32
形式逻辑	32
拓扑学	29
心理学	27
不分明性	24
集合	23
学习机、人工智能	22
信息检索	18
分类学	15
医学	13
系统论	11
生物科学	10
格论	10
推论	8
博奕论	7
悖论	7
容许空间	4
半环	3
测度	1
真值	1
模态逻辑	1

表 2　各国研究模糊理论的人数

国家	人数
美国	167
法国	53
日本	40
英国	31
加拿大	24
德意志	22
罗马尼亚	20
苏联	18
比利时	15
荷兰	13
波兰	12
意大利	10
印度	8
捷克	7
保加利亚	7
巴西	6
挪威	5
西班牙	5
新西兰	4
以色列	4
芬兰	3
瑞典	3
匈亚利	3
奥地利	2
希腊	2
南非	2
瑞士	1
澳大利亚	1
阿根廷	1
丹麦	1
埃及	1

尽易懂的说明)，森北出版，1978 年版，164 页.

此外，还有略早一点的解说(连载)：

水本：《模糊代数及其应用(1)—(25)》，数理科学，1970 年 4 月—1973 年 12 月.

关于模糊集论的研究，从基础理论到实际应用涉及到广阔的范围(表 1). 首先，作为基础的东西有模糊集的扩张 L-模糊集、R-模糊集、2 型模糊集、n' 级模糊集、概率集等等. 同时，还被应用于自动机、算法论、博奕论、形式语言、自然语言、语义论、逻辑(函数)、推理、信息论、测度、积分、图论、拓扑学、范畴理论、几何学等方面.

作为更实际一些的应用，是在模式识别、声音识别、聚类分析、机械加工、学习控制、设备控制、交通控制、机械故障诊断、系统评价、数据结构、数据库、信息检索、机器人工程、人工智能、语言学等方面.

关系到社会软系统的应用，最近慢慢地有所反映. 例如，医疗诊断、公害问题、行为科学、意向判决、动态规划、线性规划、经济学、管理学、人类工程学、工作评价、质量管理、社会科学、心理学、政治学、语言学等.

最后，表 2 给出了一些国家从事模糊数学及其应用方面的研究情况. 这个表是水本雅晴从资料中计算出来的，实际上会有更多的学者. 另外，有兴趣的人恐怕要有数倍、数十倍(仅仅 1978 年 9 月就有 250 人参加了查德的伦敦讲演会). 因为美国是模糊数学的发源地，所以人数最多，其研究涉及到从基础直到应用的广阔范围. 其次是法国，近来居然兴盛起来了. 这在很大程度上仍然是由考夫曼教科书所引起的，其内容是侧重理论方面的. 日本的研究范围也是很广的. 英国对模糊逻辑的研究搞得很活跃，对成套机械设备控制的实际应用很感兴趣. 近来，整个欧洲关于模糊理论的研究搞得特别

热烈(包括模糊理论研究小组的活动、专业杂志出版等)．特别是意向判决、数学规划、控制论等的应用搞得很活跃．模糊理论的研究已有十几年了，由于理论方面已逐渐完备起来，因而，把它的成果与具体的实际结合起来，将会成为今后的重要研究课题．

第一章　模糊理论的数学基础

§1. 通常的集合及其运算

确定的对象物的总体称为**集合**或**集**，构成集的每个事物称为集的**元素**或**元**．这里所谓"确定的对象物"的意思是：任意给出一个事物都能判定它是否包括在这些对象物之中，即能够判定它是这个集的元素或者不是这个集的元素，并且二者必居其一[1]．

x 是集合 A 的元素，用 $x \in A$ 表示，就说"x 属于 A"．x 不是 A 的元素，用 $x \notin A$ 表示．

满足关于事物 x 的命题 $P(x)$ 的 x 所构成的集合，用 $\{x | P(x)\}$ 表示．例如，若令 x 为整数，则

$$\{x | 0 \leqslant x \leqslant 5\} = \text{由元素 } 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ 构成的集合．}$$

由有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的集合 $\{x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$，用 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示．由可数个元素 $x_1, x_2, \cdots$ 构成的集合 $\{x_i | i = 1, 2, \cdots\}$，也常用 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 这种形式表示．

不含有任何事物作为其元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 来表示．例如，因为不存在"既 $0 < x < 1$，又 $x > 2$" 的数 x，所以

---

1) 模糊集论是对某种对象构成的类进行数学研究的理论，但是这种对象物是它属于或不属于这个类的判定标准没有确切地规定下来的那种事物．例如，"胖人类"、"比 1 大得多的实数类"等等．

$$\{x|0<x<1,\ x>2\}=\varnothing$$

集合的相等

关于集合 A, B, 若 $x\in A$ 则 $x\in B$, 并且若 $x\in B$ 则 $x\in A$, 二者都成立时，即当 A 与 B 是由完全相同的元素构成的集合时，则称 A 与 B **相等**并用 $A=B$ 来表示. 即

$$A=B\Longleftrightarrow\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x\in B)^{1)}$$

A 与 B 不是相等的集合时，记作 $A\neq B$.

例如，

$$\{1,2,3\}=\{1,3,2\}$$

$$\{1,2,3\}\neq\{1,3\}$$

子集

关于两个集合 A, B, 若 $x\in A$ 则 $x\in B$ 时，换句话说，A 的元素都属于 B 时，则称 A 为 B 的**子集**，或 A 含于 B，或 B 包含 A，并用 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 来表示. 即

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow\forall x(x\in A\Longrightarrow x\in B)$$

若 $A\neq B$ 且 $A\subseteq B$ 时，则记作 $A\subset B$, 并称 A 为 B 的**真子集**.

例如，$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$ 并且 $\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$.

并集和交集

以至少属于集合 A, B 二者之一的元素作为元素的集合，称为 A 与 B 的**并集**，用 $A\cup B$ 来表示. 即

$$A\cup B=\{x|x\in A\ 或\ x\in B\}$$

由集合 A, B 二者都含有的元素构成的集合，称为 A 与

---

1) 通常设 P, Q 为二命题时，则把"若 P 则 Q" 用 "$P\Longrightarrow Q$" 来表示，而"既有 $P\Longrightarrow Q$ 又有 $Q\Longrightarrow P$" (即 P 与 Q 为等价命题)时，则用 "$P\Leftrightarrow Q$" 或 "P iff Q" 表示，iff 是 if and only if 的略语，意思是"当且仅当". $\forall$ 称为**全称符号**，设 $P(x)$ 为某一命题，则 $\forall xP(x)$ 读做"对所有的 x, $P(x)$ 都成立"，在后文要出现的 $\exists$ 称为**存在符号**，$\exists xP(x)$ 读做"存在那样的 x，使 $P(x)$ 成立."$\forall$ 及 $\exists$ 统称之为**量词符号**.

B的**交集**，用 $A \cap B$ 来表示．即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

符号 $\cup$，$\cap$ 分别称为求并运算符号、求交运算符号．

若 $A \cap B = \varnothing$，即当 A，B 没有相同的元素时，则称 A 与 B **不相交**或**互质**．

例 若 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，$C = \{4, 5\}$，则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$，$A \cap B = \{2, 3\}$，$A \cap C = \varnothing$．

补集

对于集合 A，B，由属于 A 但不属于 B 的元素的全体构成的集，称为 A 与 B 的**差集**．并用 $A - B$ 来表示．即

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

若用后面讲的补集概念和符号，则可以表示成 $A - B = A \cap \overline{B}$．

在讨论集合时，常常考虑一个大集，然后来研究它的部分之间的关系．这个大集可称为**全集**，全集用 Ω 来表示．

当 Ω 为全集时，则称 $\Omega - A$ 为 A 的**补集**，A 的补集用 $\overline{A}$ 来表示．即

$$\overline{A} = \{x | x \notin A, x \in \Omega\}$$

例 设 N 为自然数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$，Ω 为整数集 $\{0, \pm 1, \pm 2 \cdots\}$，则 $\overline{N} = \{-1, -2, -3, \cdots\}$．

用特征函数解释集合运算

现在阐述讨论模糊集论时所必需的特征函数．

对于 Ω 的子集 A，由

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

所定义的函数 C_A 称为 A 的**特征函数**．

例如，对于 Ω 的子集 A，B，C，设它们的特征函数分别是 C_A，C_B，C_C，则包含关系就可以表示为

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow C_A(x) \leqslant C_B(x), \ \forall x \in \Omega$$

同样地，并集、交集、补集也能够表示为

$$C = A \cup B \Longleftrightarrow C_C(x) = \max\left[C_A(x),\ C_B(x)\right], \quad \forall x \in \Omega$$

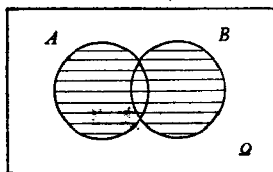
$$C = A \cap B \Longleftrightarrow C_C(x) = \min\left[C_A(x),\ C_B(x)\right], \quad \forall x \in \Omega$$

$$C = \bar{A} \Longleftrightarrow C_C(x) = 1 - C_A(x), \ \forall x \in \Omega$$

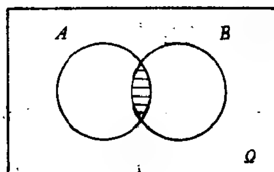
等等。

用维恩图解释集合运算

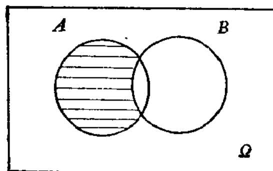
为了使并集、交集、差集、补集的概念易于理解，可以用图来表示它们。图 1 就是被称为**维恩**（Venn）**图或欧拉**（Euler）**图**的图象。



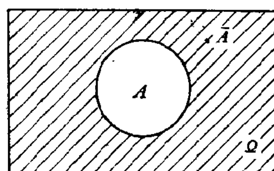
(a) 并集 A∪B



(b) 交集 A∩B



(c) 差集 A－B



(d) 补集 Ā

图 1 用维恩图解释集合运算

集合运算的公式

下面列出集合运算的基本性质：

(1) **幂等律**

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$$

(2) **交换律**

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

(3) **结合律**

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(4) **吸收律**

$$A\cup(A\cap B)=A,$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

(5) **分配律**

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(6) **对合律**

$$\bar{\bar{A}}=A$$

(7) **对偶律或德·莫尔甘（De Morgan）定律**

$$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$$
$$\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

(8) **互补律**

$$A\cup\bar{A}=\Omega,\quad A\cap\bar{A}=\emptyset$$
$$A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cap\Omega=A$$
$$A\cup\emptyset=A,\quad A\cap\emptyset=\emptyset$$

§2. 关　系

由两个集合 X，Y 的各自的元素 x，y 作成序偶 (x, y)，所有这样的 (x, y) 构成的集，称为 X 与 Y 的**直积**，记作

$X \times Y$。即

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

例 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$, 则

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$Y \times X = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

正如从上面这个例子所看出来的那样，只要不是$X = Y$，则 $X \times Y \neq Y \times X$。

更一般地，把 $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的直积，记作 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$，它是由 X_i 的元素 x_i 的有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所构成的集合。即

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

对于集合 X, Y, 直积 $X \times Y$ 的子集R称为X与Y之间的**二元关系**或只称为**关系**. 若 $X = Y$, 则 $X \times X$ 的子集R称为X上的二元关系，或只称为X上的关系.

一般地，$\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n个}$ 这样直积的子集R称为X上的 **n元关系**.

例 集合$\{0, 1, 2, 3, 4\}$上的所谓“小于”关系（以$<$表示）就是

$$< = \left\{\begin{matrix}(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2) \\ (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\end{matrix}\right\}$$

若 $(x, y) \in R$, 则称 “x 对 y 具有关系 R”, 也记作 xRy. 若 $(x, y) \notin R$, 则记作 $x\boldsymbol{R}y$. 在上例中是 $0R1$, 而 $3\boldsymbol{R}2$.

设 R_1, R_2 是 X 上的二元关系，所谓 R_1 与 R_2 的**合成**，用 $R_1\cdot R_2$ 表示之，这个合成是象下式那样定义的 X 上的二元关系：

$$x(R_1\cdot R_2)y \Longleftrightarrow (\exists z)X(xR_1z \text{ 并且 } zR_2y)$$

例 设 $R_1=\{(m,n)\mid m-n=1\}$，则

$$R_1\cdot R_1=R_1^2=\{(p,q)\mid p-q=2\}$$

§3. 映 射

在两个集 X, Y 之间，若确定一个法则，对于 X 的每个元素 x，都有 Y 的某一元素 y 与之相对应，这个法则就称为从 X 到 Y（之中）的**映射**或**函数**。映射一般用 f, g 等字母来表示。

对于元素来说，映射记作

$$x\xrightarrow{f}y\ (\text{或 } y=f(x))$$

对于集合来说，映射记作

$$X\xrightarrow{f}Y\ (\text{或 } f:X\to Y)$$

X 称为映射 f 的**定义域**，而

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射 f 的**值域**。

对于映射可以考虑下列三种情形：

1° $f(X)=Y$ 的映射 f，称为**从 X 到 Y 上的映射**，或者称为**全射**。

2° 若 $x, x'\in X$，且 $x\neq x'$，则 $f(x)\neq f(x')$，这种映射 f 称为**从 X 到 Y 的一对一的映射**，或称为**单射**。

3° 既是全射又是单射的映射，则称为**全单射**。

以图来表示全射、单射和全单射，可画成图 2 那样。

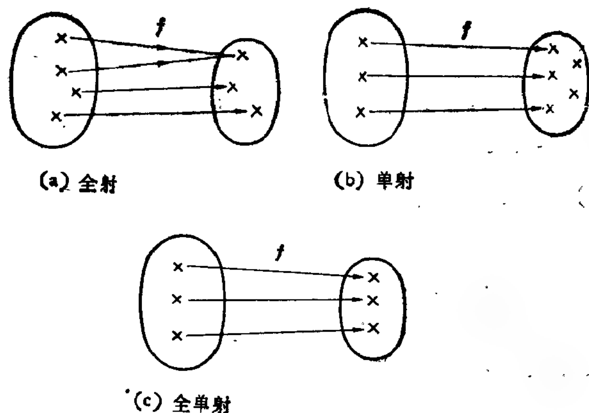


图 2　全射、单射及全单射的图示

对于 $f: X \to Y$ 的映射 f 来说，

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$$

称为由 f 确定的 y 的**逆象**或**原象**，映射 f^{-1} 称为**逆映射**。

另外，对于 $B \subseteq Y$，把

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \mid f(x) = y,\ y \in B\} \\ &= \{f^{-1}(y) \mid y \in B\} \end{aligned}$$

称为由 f 确定的 B 的**逆象**或**原象**。

关于从集合 X 到集合 Y 的映射 f，有下列的性质．其中 A_1，A_2 是 X 的子集，B_1，B_2 是 Y 的子集。

1）若 $A_1 \subseteq A_2$，则 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

2）$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

3）$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

当 f 为单射时，等号成立。

4）$f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$

当 f 为单射时，等号成立。

5) 若 $B_1 \subseteq B_2$ 则 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

在逆映射,等号成立.

8) $f^{-1}(\overline{B}_1) = \overline{(f^{-1}(B_1))}$

9) $f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$

当 f 为单射时,等号成立.

10) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

当 f 为全射时,等号成立.

§4. 格

半序集

设 x, y, z 为集合 P 的任意的元，并且存在满足表 1 的(1)自反律、(2)反对称律以及(3)传递律的顺序关系≤时，集

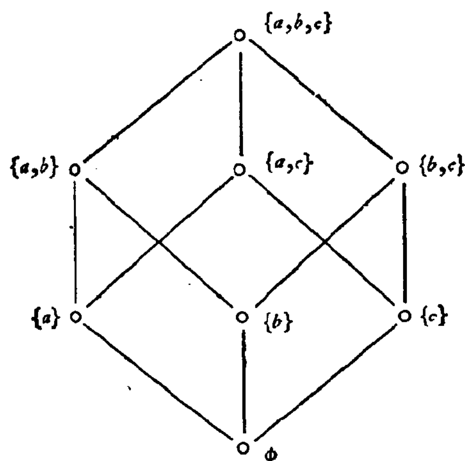


图 3 $(2^S, \subseteq)$ 的哈塞图



图 4 全有序集的哈塞图

合 P 则称为**半序集**．要确切地刻划它，就用 $(P, \leqslant)$ 来表示．若除了(1)，(2)，(3)之外还满足(4)，即对于任意两个元顺序关系都成立时，则集合 P 称为**全有序集或线性有序集**．

例 设 $S = \{a, b, c\}$ 是个集合，而 2^S 为 S 所有子集构成的集合(称为幂集)时，则 2^S 在包含关系 $\subseteq$ 下成为半序集，但并不是全有序集．把它用哈塞（Hasse）图表示之，如图 3．

全有序集，一般地能够用图 4 那样一列的线形图来刻划它．

表 1 格的基本公式

(1) **自反律**

$x \leqslant x$

(2) **反对称律**

若 $x \leqslant y$，$y \leqslant x$，则 $x = y$

(3) **传递律**

若 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$

(4) $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$

(5) **幂等律**

$x \vee x = x$，$x \wedge x = x$

(6) **交换律**

$x \vee y = y \vee x$，$x \wedge y = y \wedge x$

(7) **结合律**

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(8) **吸收律**

$x \vee (y \wedge x) = x$

$x \wedge (y \vee x) = x$

(9) **模律**

若 $x \leqslant z$ 则

$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$

(10) **分配律**

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(11) **消去律** 若 $x\wedge y=x\wedge z$, $x\vee y=x\vee z$ 则 $y=z$
(12) **互补律** $x\vee\bar{x}=I$, $x\wedge\bar{x}=O$
(13) **同一律** $x\vee I=I$, $x\wedge I=x$ $x\vee O=x$ $x\wedge O=O$
(14) **对合律** $\bar{\bar{x}}=x$
(15) **德·莫尔甘定律** $\overline{(x\vee y)}=\bar{x}\wedge\bar{y}$ $\overline{(x\wedge y)}=\bar{x}\vee\bar{y}$
(16) **中值不等式** $x\vee y\vee z\geqslant(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$ $\geqslant x\wedge y\wedge z$
(17) **极小极大不等式** $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n}x_{ij}\right)\geqslant\bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}x_{ij}\right)$

对于半序集 P 的所有的元 x,若 $m\geqslant x$ 成立,则称 $m(\in P)$ 为**最大元**,若 $n\leqslant x$ 成立,则称 $n(\in P)$ 为**最小元**。

对于半序集 P 的子集X的所有的元 x, 满足 $a\geqslant x$ 的 P 的元 a, 称为X的**上界**;而对于 $x\in X$ 的所有元 x, 满足 $b\leqslant x$ 的 P的元 b, 称为X的**下界**. 然而, 半序集的子集仍然是半序集,所以由X的上界所构成的集 (P 的子集)的最小元 n, 称为X的**上限**或**最小上界**. X的下界中的最大元 m, 称为X的**下限**或**最大下界**. 这些关系用图表示,如图 5.

格

在半序集 $(L,\leqslant)$ 中,对于它的任意两个元 x,y, 若上

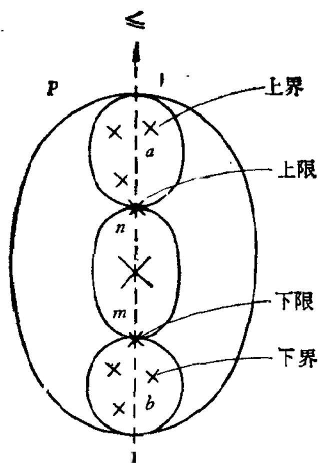


图 5

限、下限都存在时，则称 L 构成**格**. x, y 的上限、下限分别用 $x \vee y$, $x \wedge y$ 来表示.

1° 在格中，三个条件 $x \leqslant y$, $x \wedge y = x$, $x \vee y = y$ 是相互等价的.

2° 对任意的格，表 1 的(6)交换律、(7) 结合律以及(8)吸收律都成立[1].

这三条定律称为**格的公理**.

总之，格 L 是由 $(L, \leqslant, \vee, \wedge)$ 建立起来的一个代数系统.

对于任意的格 L 来说，不一定存在最大元和最小元. 只要是存在最大元及最小元的情形，就分别用 I, O 表示它们. 在这种情形下，表 1 的(13)同一律成立.

3° 对于格，若依据格的公理得的一个命题是真的，则把

1) (5)幂等律可由(6),(7),(8)三条定律导出.

$\leqslant$与$\geqslant$、$\vee$与$\wedge$互换所得的对偶命题也是真的。——**对偶原理**——

由有限个$\vee$及$\wedge$结合而成的式子，称为**格多项式**，它具有下述性质：

4° 格多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于其变数是单调函数。即若

$$a_i \leqslant b_i \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

则

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant f(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

模格

满足表 1 之(9)**模律**的格，称为**模格**。

图 6，图 7 表示出了模格及非模格的例。

1° 一个格是"非模格"的充分必要条件是含有图 7 那样形状的元素组。

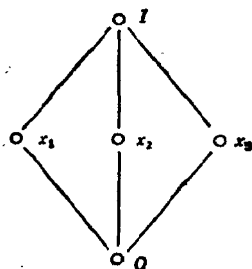


图 6 模格的例

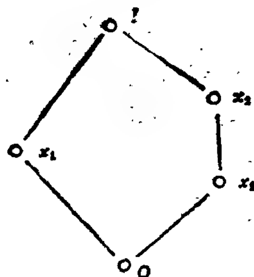


图 7 非模格的例

分配格

使表 1 中的(10)**分配律**成立的格，称为**分配格**。

1° 分配律和下式等价

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$$

$$= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

又,因为若分配律成立,则模律成立,所以有:

2° 分配格都是模格,但反之一般不成立.

3° 一个格不是分配格的充分必要条件是它含有图6,图7 形状的元素组.

4° 在分配格中,表 1 之(11)消去律成立.

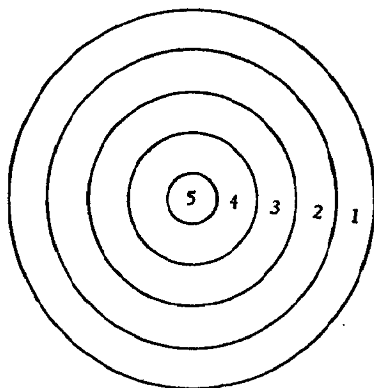
例 1 图 3 是分配格.

例 2 是全有序集的一切的格,都是分配格.

布尔格

在有最大元 I 和最小元 O 的格 L 中,若对一个元 x,存在 L 的元 y 使 $x \vee y = I$, $x \wedge y = 0$, 则称 y 为 x 的**补元**. 记作 $\bar{x}$. 格的所有的元,都至少存在一个补元时,则称此格为**具有补元的格**(简称为**可补格**).

所谓**布尔** (Boole) **格**或**布尔代数**,就是指具有补元的分配格. 一般地,在布尔格中,对于各个元来说,补元只有一个.



1: 半序集 2: 格 3: 模格 4: 分配格 5: 布尔格

图 8 格之间的包含关系

例　图3是布尔格的例．它是分配格这件事是显然的（不含有图6，图7那样的子格）．而 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$ 的补元分别是 $\{b,c\}$，$\{a,c\}$，$\{a,b\}$．

以上概述了各种格，若把它们的包含关系表示出来，则象图8那样．

在这里大致汇集了为讨论模糊集论所必需的基础知识，下一章就讲述模糊集．

第二章　模　糊　集

前一章，讲了模糊代数的预备知识——一般集合论和格论的概要. 当然，只有那些内容是不够的，因此，根据需要我们打算一边讨论一边增加注释.

本章将介绍作为模糊代数基础的模糊集及讨论模糊系统时所必需的模糊关系.

自然界中见到的事物的类，多数情形是没有清楚地规定出能够判定作为对象的事物是否属于该类的准则. 例如，我们来研究一下动物这个类，人、狗、小鸟等等，很明确地都可以看作是动物类的成员，相反，石头、水、电视等等，可以很明确地说不是动物类的成员. 然而，海盘车、细菌等如何呢？我们还不能确切地区分开它们是否是动物类的成员. 亦即处于不分明的状态. 对于"比 10 大得多的所有的实数的类"来说，30 和 70 等等也同样处于不分明的中间状态. 此外，还可以考虑"高身材人的类"、"竞赛中的好战略的类"等等. 更进一步，可以说形容词"长的"、"大的"、"冷的"等等也都是不分明的.

这些并没有明确地构成通常数学意义下的类(或集). 但是，这种没有确切地定义的"类"，是与人类的思考有关的，尤其在人工智能、模式识别、信息处理等方面是起重要作用的概念.

然而，对这种不分明地定义了的类，以数学方式进行讨论的文献，以前还没有见到. 1965 年以来，由于加里福尼亚大学(伯克利分校)的查德教授引入了所谓特征函数一般化的隶属函数，而创立了赋予这种不分明地定义了的类似量的特征

的模糊集论。

§1. 模糊集的若干定义

设 X 为**空间**，其点或**元素**以 x 来表示. 即 $X=\{x\}$。

所谓空间 X 中的**模糊集** A，就是由如下的**隶属函数**[1]表示其特征的集合. 即，μ_A 是

$$\mu_A: X \to M$$

这样的函数. 在这里，M 称为**隶属空间**.

对于元素 x，值 $\mu_A \in M$ 表示 x 属于模糊集 A 的程度或等级.

若 M 为 $\{0,1\}$ 的情形，则模糊集 A 就成为通常意义下的集合，隶属函数就成为特征函数. 即根据元素 x 是属于或不属于 A，$\mu_A(x)$ 只取 1 或 0 两个值.

隶属空间 M，一般地可以是半序集或格. 但是，为了简便起见，以 $M=[0,1]$ 这样的区间来进行讨论. 关于 M 是半序集或格的情形，准备以后来讲.

现在可把模糊集再重新定义如下.

定义 所谓空间 $X=\{x\}$ 中的**模糊集** A，就是以

$$\mu_A: X \to [0,1]$$

这个隶属函数表示其特征的集合。

若值 $\mu_A(x)$ 靠近 1，则表示 x 属于 A 的程度高，反之，若 $\mu_A(x)$ 靠近 0，则表示 x 属于 A 的程度低.

例 设 A 为"比 0 大得多的实数"的模糊集，即 $A=\{x \mid x \gg 0\}$[2]，作为表示 A 的特征的隶属函数，当然是具有主观性的，例如，可以象下边这样地给出:

1) 亦称模糊特征函数.

2) 当然这种记法是不充分的，只是为了方便才这样表示的。

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

以图来表示 μ_A，则如图 1。

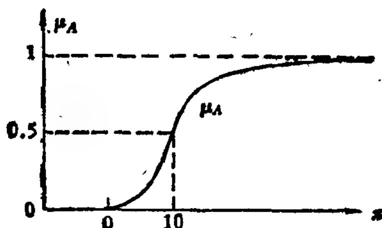


图1 $A=\{x|x\gg 0\}$ 的说明

下面阐述模糊集合的基本运算，这种运算可以作为一般集合运算的扩充来讨论。

模糊集的相等

所谓模糊集 A，B **相等**，就是指对于所有的 $x\in X$，有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，记为 $A=B$。μ_A，μ_B 分别是模糊集 A，B 的隶属函数。（后文规定把对所有的 $x\in X$，有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ 一事，简略地记作 $\mu_A=\mu_B$。）即

$$A=B \Longleftrightarrow \mu_A=\mu_B$$

空集

所谓模糊集 A 是**空集**，就是指对 $\forall x\in X$，有 $\mu_A(x)=O$。记作 ϕ。即

$$A=\phi \Longleftrightarrow \mu_A=O$$

模糊集的包含关系

在模糊集 A，B 中，所谓 A **包含于** B 中或 A 是 B 的**子集**，是指对 $\forall x\in X$ 有 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$。记为 $A\subseteq B$。即

$$A\subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A\leqslant\mu_B$$

例 1 “身材特别高的人”的模糊集，包含于“身材高的人”的模糊集中.

例 2 “比 1 大得多的”实数的模糊集，包含于“比 1 还大的”实数的集合中.

例 3 若 $\mu_A = \mu_B^2$，则 $A \subseteq B$.

模糊集的补集

所谓模糊集 A 的**补集**，定义为对于 $\forall x \in X$ 有 $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$. A 的补集记为 $\bar{A}$. 即

$$\bar{A} \Longleftrightarrow \mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$$

例 模糊集 $A = \{x | x \gg 1\}$ 的补集是 $\bar{A} = \{x | x$ 并非 $\gg 1\}$

模糊集的并集

所谓模糊集 A, B 的**并集**或**并**，记为 $A \cup B$，定义为包含集 A 及集 B 两者的最小的模糊集. 设 $C = A \cup B$，则其隶属函数可表示为 $\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$，$\forall x \in X$. 即

$$C = A \cup B \Longleftrightarrow \mu_C = \max[\mu_A, \mu_B]$$

从而，若在点 x，$\mu_A(x) = 0.9$，$\mu_B(x) = 0.4$，则 $\mu_{A \cup B}(x) = 0.9$.

模糊集 A 与 B 的并集 $C = A \cup B$，是表示同时包含集合 A, B 的最小的模糊集. 因此，设 D 为同时包含 A, B 的任意的模糊集，则 D 也包含 A, B 的并集. 首先，因为

$$\max[\mu_A, \mu_B] \geqslant \mu_A$$

及

$$\max[\mu_A, \mu_B] \geqslant \mu_B$$

所以，C 同时包含 A 及 B. 若再设 D 为同时包含 A 及 B 的任意的模糊集，则

$$\mu_D \geqslant \mu_A$$

$$\mu_D \geqslant \mu_B$$

成立．从而

$$\mu_D \geqslant \max[\mu_A, \mu_B] = \mu_C$$

由此得出 $C \subseteq D$．

模糊集的交集

模糊集 A，B 的**交集**或**交**记作 $A \cap B$，定义为包含于 A，B 两者的最大的模糊集．设 $C = A \cap B$，则其隶属函数可表为 $\mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$，$\forall x \in X$．即

$$C = A \cap B \Longleftrightarrow \mu_C = \min[\mu_A, \mu_B]$$

另外，用与并集情形同样的方法，可以说明模糊集 A 及 B 的交集，就是含于 A 及 B 的最大的模糊集．

显然，还可以用 $A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$来表示．模糊集的交．

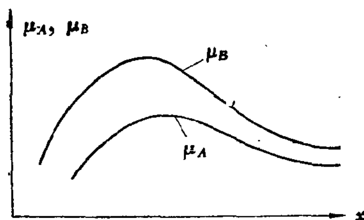


图 2　$A \subseteq B$ 的说明

和一般的集合的情形一样，对于模糊集 A，B，若 $A \cap B = \phi$，则称 A 与 B **不相交**或**互质**．

图 2 给出了说明一维上的模糊集包含关系的隶属函数．图 3 给出了说明模糊集的补集的隶属函数．在图 4 中，给出隶属函数分别为 μ_A，μ_B 的模糊集 A，B 的并集和交集以及下面就要定义的代数积 $AB(\mu_{AB} = \mu_A\mu_B)$ 的关系．线段 1，2（细线）是关于并集的隶属函数，线段 3，4（粗线）是关于交集的隶属函数，线段 5 是关于代数积的隶属函数．一般地，在模糊集意义下，$A \cup B \geqslant A \cap B \geqslant AB$ 的这种包含关系成

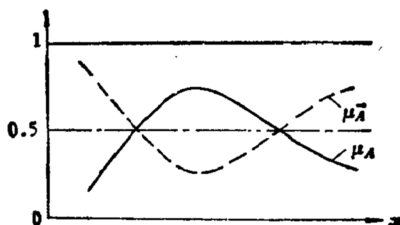


图3　补集 $\bar{A}$ 的说明

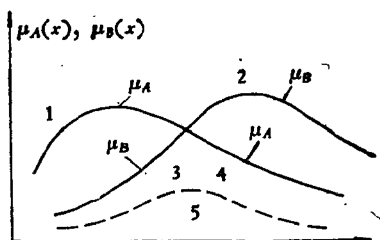


图4　模糊集的并集(线段1，2) 交集(线段3，4)
及代数积(线段5) 的说明图

立。

§2. 模糊集运算的基本性质

在通常集合中成立的各种基本性质一般地对于模糊集也都成立。其基本性质揭示在下面的表1中。但是由于在模糊集中，一般地(12)的互补律是不成立的。因而需要注意虽然模糊集在包含关系下构成分配格，可是它并没有构成布尔格。

为了证明表1中的在模糊集中成立的各种性质，来考察表示模糊集特征的隶属函数就可以。

例如，对于德·莫尔甘定律：$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$，只要证

表 1　模糊集的基本性质

(1) $A \subseteq A$（自反律）
(2) 若 $A \subseteq B, B \subseteq A$ 则 $A = B$（反对称律）
(3) 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$（传递律）
(4) $\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$（幂等律）
(5) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$（交换律）
(6) $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\}$（结合律）
(7) $\left.\begin{array}{l} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\}$（吸收律）
(8) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$（分配律）
(9) $\bar{\bar{A}} = A$（双重否定律）
(10) $\left.\begin{array}{l} \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}\right\}$（德·莫尔甘定律）
(11) $\left.\begin{array}{l} A \cup \Omega^{1)} = \Omega, \ A \cap \Omega = A \\ A \cup \phi = A, \quad A \cap \phi = \phi \end{array}\right\}$（定常律）
(12) 一般地 $\left.\begin{array}{l} A \cup \bar{A} \neq \Omega \\ A \cap \bar{A} \neq \phi \end{array}\right\}$（互补律不成立）

明

$$1 - \max[\mu_A, \ \mu_B] = \min[1 - \mu_A, \ 1 - \mu_B]$$

1) Ω是全集，是空间 X. 即对于所有的 $x \in X$，总是 $\mu_\Omega(x) = 1$。

就可以．为此，只要试验 $\mu_A \geqslant \mu_B$ 的情形和 $\mu_A \leqslant \mu_B$ 的情形，就能够很容易地证明．

同样地，例如为了证明分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，只要指出

$$\min[\mu_A, \max[\mu_B, \mu_C]] = \max[\min[\mu_A, \mu_B], \min[\mu_A, \mu_C]]$$

就行．在这里若引入符号 $\max[x, y]=x\vee y$，$\min[x, y]=x\wedge y$，则上式可以写成

$$\mu_A\wedge(\mu_B\vee\mu_C)=(\mu_A\wedge\mu_B)\vee(\mu_A\wedge\mu_C)$$

并且，为了证明它，只要按照以下的 6(＝3！)种情形来考虑就可以进行证明．

$$\mu_A\geqslant\mu_B\geqslant\mu_C,\ \mu_A\geqslant\mu_C\geqslant\mu_B,\ \mu_B\geqslant\mu_C\geqslant\mu_A$$
$$\mu_B\geqslant\mu_A\geqslant\mu_C,\ \mu_C\geqslant\mu_A\geqslant\mu_B,\ \mu_C\geqslant\mu_B\geqslant\mu_A$$

表 2 就是说明这些情形的．

表 2　分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 的证明

$\geqslant$			$\mu_B\vee\mu_C$	$\mu_A\wedge(\mu_B\vee\mu_C)$	$\mu_A\wedge\mu_B$	$\mu_A\wedge\mu_C$	$(\mu_A\wedge\mu_B)\vee(\mu_A\wedge\mu_C)$
μ_A	μ_B	μ_C	μ_B	μ_B	μ_B	μ_C	μ_B
μ_A	μ_C	μ_B	μ_C	μ_C	μ_B	μ_C	μ_C
μ_B	μ_C	μ_A	μ_B	μ_A	μ_A	μ_A	μ_A
μ_B	μ_A	μ_C	μ_B	μ_A	μ_A	μ_C	μ_A
μ_C	μ_A	μ_B	μ_C	μ_A	μ_B	μ_A	μ_A
μ_C	μ_B	μ_A	μ_C	μ_A	μ_A	μ_A	μ_A

在一般集合论中，“属于”或“不属于”是重要的概念，可是在模糊集的情形下，隶属函数的值为 1 及 0 以外的情形，就没有规定出“属于”、“不属于”的意义．但是，设置**阈值**就可定义

出“属于”与“不属于”的概念．根据等级数为 1,2,…，则对应于 2 值、3 值…的多值逻辑．例如，等级数为 2 的情形，即对于 $0<\alpha<\beta<1$ 的这种阈值 α，β，则可定义如下：

(1) 若 $\mu_A(x)\geqslant\beta$，则“x 属于 A”

(2) 若 $\mu_A(x)\leqslant\alpha$，则“x 不属于 A”，

(3) 若 $\alpha<\mu_A(x)<\beta$，则“x 关于 A 处于中间状态”。

§3. 模糊集的代数运算

现在，我们来说明模糊集运算 ∪，∩，‾ 以外的，讨论模糊集时很重要的代数运算．

代数积

模糊集的**代数积**，记为 AB，其隶属函数可定义如下

$$\mu_{AB}=\mu_A\mu_B$$

代数和[1]

模糊集 A,B 的**代数和**，记为 $A\oplus B$，其隶属函数可以如下给出：

$$\mu_{A\oplus B}=\mu_A+\mu_B-\mu_{AB}$$

另外，代数和 $A\oplus B$ 可以用代数积以及否定来表示如下

$$A\oplus B=\overline{(\overline{A}\overline{B})}\text{[2]}$$

绝对差

模糊集 A,B 的**绝对差**，以 $|A-B|$ 表示之，可定义如下

---

1) 代数和以 $A+B$ 表示之，也有把其隶属函数定义为 $\mu_{(A+B)}=\mu_A+\mu_B$ 的方法．这种情形仅仅在对于所有 $x\in X$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant1$ 成立时有意义．

2) 右边 $=1-(1-\mu_A)(1-\mu_B)=1-(1-\mu_A-\mu_B+\mu_A\mu_B)=\mu_A+\mu_B-\mu_{AB}=\mu_{A\oplus B}=$ 左边．

$$\mu_{|A-B|} = |\mu_A - \mu_B|$$

这个定义若用图来说明，则 $\mu_{|A-B|}$ 就是图 5 中的虚线部分。

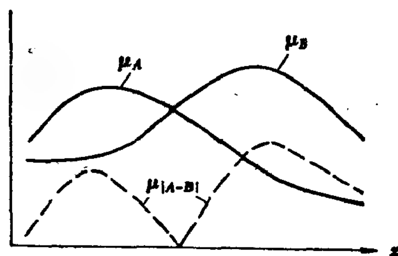


图5　模糊集 A,B 的绝对差的说明

另外，在一般集合中，若设 A,B 为通常的集合，则其绝对差 $|A-B|$ 可以写成 $(A\cup B)-(A\cap B)$. 以维恩图表示之则如图 6

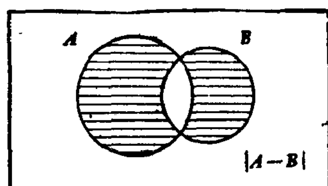


图 6　通常集合的绝对差的说明

§4. 模 糊 关 系

模糊关系可以作为通常的关系的扩张来讨论，但是，其应用涉及到很广阔的范围. 查德教授运用模糊关系的概念，使输入、输出、状态具有模糊特性的系统，即模糊系统和模糊算法规格化了. 关于这些内容以后再讲. 模糊关系在被称之为

软科学的例如生物学、心理学、经济学等方面以及在研究工业设计等问题方面，都是很重要的。

模糊关系

在直积空间 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ 中的**模糊关系** R，就是在 $X \times Y$ 中的模糊集 R，它以 $\mu_R(x, y)$ 这个隶属函数来表示其特征。若 $X = Y$，则把 $X \times X$ 中的模糊关系称为 **X 上的模糊关系**

更一般地，在直积空间 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中的 **n 元关系** R，就是可以用 n 元隶属函数 $\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表出其特征的 X 中的模糊集 R。其中，$x_i \in X_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

例 1 设 x, y 为汽车，则"x 比 y 好"这种关系就是模糊关系。

例 2 设 x, y 是人，则"x 和 y 相象"这种关系也是模糊关系。

例 3 设 $X = X_1 \times X_1$，在这里 X_1 是实数轴 $(-\infty, \infty)$. 则"x 比 y 大得多"这种关系，亦即 $x \gg y$，在 X 中是模糊关系. 这种情况，作为隶属函数，虽然是具有主观性，但仍可以如下给出

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}}, & x > y \end{cases}$$

模糊关系的合成

设 R_1，R_2 为 X^2 中的模糊关系，则 R_1，R_2 的**合成**，还是 X^2 中的模糊关系，记为 $R_1 \circ R_2$，可定义如下：

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, y) = \sup_{v \in X} \min \left[\mu_{R_1}(x, v), \mu_{R_2}(v, y)\right]$$

简单地写则

$$= \bigvee_{v} [\mu_{R_1}(x, v) \wedge \mu_{R_2}(v, y)]$$

例 设 R 为 $x \gg y$ 的模糊关系，而其隶属函数 μ_R 用

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}}, & x > y \end{cases}$$

来给定，则合成 $R \circ R$ 是 $x \rangle\rangle\rangle y$ 的这个模糊关系，以如下的隶属函数来表示其特征：

$$\mu_{R \circ R}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{100}{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2}}, & x > y \end{cases}$$

模糊关系的基本性质：

性质 1 模糊关系的合成满足结合律．即，设 A，B，C 为模糊关系，则

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

证明

$$\mu_{(A \circ B) \circ C}(x, w)$$

$$= \bigvee_{z} [\mu_{A \circ B}(x, z) \wedge \mu C(z, w)]$$

$$= \bigvee_{z} \left[\left\{ \bigvee_{y} [\mu_A(x, y) \wedge \mu_B(y, z)] \right. \right.$$

$$\left. \wedge \mu_C(z, w) \right]$$

$$= \bigvee_{z, y} [\mu_A(x, y) \wedge \mu_B(y, z)$$

$$\wedge \mu_C(z, w)]$$

$$= \bigvee_{y} \Big[\mu_A(x, y)$$

$$\wedge \Big\{ \bigvee_{z} [\mu_B(y, z) \wedge \mu_C(z, w)] \Big\} \Big]$$

$$= \bigvee_{y} [\mu_A(x, y) \wedge \mu_{B\circ C}(y, w)$$

$$= \mu_{A\circ(B\circ C)}(x, w)$$ （证完）

由于模糊关系是模糊集，因而，与模糊集的情形一样，把 X 上的模糊关系的并（$\cup$），交（$\cap$），包含（$\subseteq$）以及否定（$\bar{\ }$）定义如下：

1° $R_1 \cup R_2 \Longleftrightarrow \mu_{R_1 \cup R_2}(x, y)$
$= \max [\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)]$

2° $R_1 \cap R_2 \Longleftrightarrow \mu_{R_1 \cap R_2}(x, y)$
$= \min [\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)]$

3° $R_1 \subseteq R_2 \Longleftrightarrow \mu_{R_1}(x, y) \leqslant \mu_{R_2}(x, y)$

4° $\overline{R} \Longleftrightarrow \mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$

又，模糊关系 R 的**逆模糊关系** R^C 定义如下：

5° $R^C \Longleftrightarrow \mu_{R^C}(y, x) = \mu_R(x, y)$

进而可以定义下列关系：

6° $I \Longleftrightarrow \mu_I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$

7° $O \Longleftrightarrow \mu_O(x, y) = 0$

8° $E \Longleftrightarrow \mu_E(x, y) = 1$

这样，就可以导出模糊关系的如下性质：

性质 2 $I \circ R = R \circ I = R$

$O \circ R = R \circ O = O$

$E \circ R = R \circ E = E$

性质 3 若 $S \subseteq T$，则

$$R\circ S\subseteq R\circ T$$

$$S\circ R\subseteq T\circ R$$

性质 4 $R\circ\left(\bigcup_i R_i\right)=\bigcup_i (R\circ R_i)$

$$\left(\bigcup_i R_i\right)\circ R=\bigcup_i (R_i\circ R)$$

性质 5 $R\circ\left(\bigcap_i R_i\right)=\bigcap_i (R\circ R_i)$

$$\left(\bigcap_i R_i\right)\circ R=\bigcap_i (R_i\circ R)$$

性质 6 $(R_1\circ R_2)^C=R_2^C\circ R_1^C$

性质 7 $\left(\bigcup_i R_i\right)^C=\bigcup_i R_i^C$

$$\left(\bigcap_i R_i\right)^C=\bigcap_i R_i^C$$

性质 8 $(R^C)^C=R$

证明 首先，性质 2，3，8 是显然的。

性质 4 的证明

$$\begin{aligned}
&\mu_{R\circ(\bigcup_i R_i)}(x,z)\\
&=\bigvee_y\{\mu_R(x,y)\wedge\mu_{(\bigcup_i R_i)}(y,z)\}\\
&=\bigvee_y\left\{\mu_R(x,y)\wedge\left[\bigvee_i \mu_{R_i}(y,z)\right]\right\}\\
&=\bigvee_i\bigvee_y\{\mu_R(x,y)\wedge\mu_{R_i}(y,z)\}\\
&=\bigvee_i \mu_{R\circ R_i}(x,z)\\
&=\mu_{\bigcap_i (R\circ R_i)}(x,z)
\end{aligned}$$

另外的那个公式也可同样证明

性质 5 的证明

$$\mu_{R\circ(\bigcap_i R_i)}(x, z)$$

$$= \bigvee_y \{\mu_R(x, y) \wedge \mu_{(\bigcap_i R_i)}(y, z)\}$$

$$= \bigvee_y \Big\{\mu_R(x, y) \wedge \Big[\bigwedge_i \mu_{R_i}(y, z)\Big]\Big\}$$

$$= \bigvee_y \bigwedge_i \{\mu_R(x, y) \wedge \mu_{R_i}(y, z)\}$$

$$\leqslant \bigwedge_i \bigvee_y \{\mu_R(x, y) \wedge \mu_{R_i}(y, z)\},$$

根据极小极大不等式

$$= \bigwedge_i \mu_{R\circ R_i}(x, z)$$

$$= \mu_{\bigcap_i (R\circ R_i)}(x, z)$$

另外的同样可证。

性质 6 的证明

$$\mu_{(R_1\circ R_2)^C}(x, z)$$

$$= \mu_{R_1\circ R_2}(z, x)$$

$$= \bigvee_y [\mu_{R_1}(z, y) \wedge \mu_{R_2}(y, x)]$$

$$= \bigvee_y [\mu_{R_1^C}(y, z) \wedge \mu_{R_2^C}(x, y)]$$

$$= \bigvee_y [\mu_{R_2^C}(x, y) \wedge \mu_{R_1^C}(y, z)]$$

$$= \mu_{R_2^C \circ R_1^C}(x, z)$$

性质 7 的证明

$$\mu_{(\bigcup_i R_i)^C}(y, x)$$

$$= \mu_{(\bigcup_i R_i)}(x, y)$$

$$= \bigvee_i [\mu_{R_i}(x, y)]$$

$$= \bigvee_i [\mu_{R_i^C}(y, x)]$$

$$= \mu_{(\bigcup_i R_i^C)}(y, x)$$

另外的也同样可证。

到此，性质 2～8 已全部证明完了.

所谓 X 上的模糊关系 R **是对称的**，是指

$$R = R^C$$

成立。

所谓模糊关系 R 是**传递的**，是指

$$R \circ R \subseteq R$$

成立。

例 1 "x 与 y 相象"这种模糊关系是对称的。

例 2 "$x \gg y$" 这种模糊关系是传递的。

性质 9 对称的模糊关系的并（∪）及交（∩）也是对称的。

证明 设模糊关系 R_i 为 $R_i = R_i^C$ 的关系，则

$$\left(\bigcup_i R_i\right)^C = \bigcup_i R_i^C = \bigcup_i R_i$$

交的情形，同样可证。

性质 10 传递的模糊关系的交(∩)也是传递的.

证明 设模糊关系 R_i 为 $R_i \circ R_i \subseteq R_i$ 这种关系,则

$$\bigcap_i R_i \circ \bigcap_i R_i \subseteq \bigcap_i \left(R_i \circ \bigcap_i R_i\right)$$

$$\subseteq \bigcap_i (R_i \circ R_i) \subseteq \bigcap_i R_i$$

性质 11 对所有的模糊关系

(1) 存在着包含 R 的最小的对称的模糊关系.

(2) 存在着包含 R 的最小的传递的模糊关系.

(3) 存在着包含于 R 中的最大的对称的模糊关系.

证明 (1)的证明

设 Q 为使 $R \subseteq S$ 成立的所有的对称的模糊关系 S 的集合. 但是,由于 $E \in Q$, 所以 $Q \neq \phi$. 从而,根据性质 9, $S_0 = \cap\{S | S \in Q\}$ 就是所求的包含 R 的最小的对称的模糊关系. (2),(3)用同样的方法可以证明.

第三章 凸模糊集

本章介绍研究模式识别和最优化等问题时起重要作用的凸模糊集. 在进入主题以前，首先介绍必要的数学基础知识.

§1. 凸模糊集的数学基础

n 维实欧几里得空间用 E^n 来表示. 在 E^n 中确定一个直交坐标系，E^n 的点 x 用坐标

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表示. E^1, E^2, E^3 分别相当于直线、平面和立体空间. 对于点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及点 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 来说，两点 x, y 之间的**距离**，可用

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{1}$$

来表示. 这个距离函数具有以下三个性质:

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$, 仅当 $x = y$ 时，等号才成立.

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (对称性)

(3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (三角形公理)

若把点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 考虑为 n 维向量，则向量的**模**(亦称**绝对值**或**长度**)规定为:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{2}$$

这样一来，这个模则

(1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = (0, 0,$

$\cdots, 0)$，即 x 为原点.

(2) 对于任意实数 λ，都有

$\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$.

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

这样，两点间的距离就可用模来表示

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{3}$$

当 $x_0 \in F^n$，ε 为正实数时，则称以 x_0 为中心，以 ε 为半径的**超球面**的内部为 x_0 的 **ε-邻域**或 **ε-球面邻域**，记为 $U(x_0, \varepsilon)$，即

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \mid \rho(x_0, x) < \varepsilon\} \tag{4}$$

当不需要特别地把 $\varepsilon(>0)$的值作为问题时，则往往把 $U(x_0, \varepsilon)$ 简单地称为 x_0 的邻域. 另外，对应于 E^1, E^2, E^3 的邻域分别是线段、圆和球.

所谓点 x 是集合 A 的**内点**，就是指存在着完全包含于 A 的 x 的 ε-邻域. 所谓点 x 是集合 A 的**边界点**，就是指 x 的任何 ε-邻域，都含有属于 A 的点与不属于 A 的点. 既不是 A 的内点又不是 A 的边界点的点称为 A 的**外点**. A 的内点的集合称为 A 的**内部**，A 的边界点的集合称为 A 的**边界**，A 的外点的集合称为 A 的**外部**.

集合 A 只由 A 的内点构成时，即完全不包含边界点时，则称 A 为**开集**. 与此相反的，集合 A 包含 A 的所有边界点时，则称 A 为**闭集**. 例如 ε-邻域就是开集.

开集和闭集有如下的基本性质.

1° 开集的补集是闭集，反之也成立.

2° 任意个开集的并集以及有限个开集的交集是开集.

3° 由有限个点构成的集合是闭集.

4° 任意个闭集的交集以及有限个闭集的并集是闭集.

例 任意个开集的交集不一定是开集. 可用例子来说明

这一点. 设 x 为 E^n 的一个点,则

$$x = U(x, 1) \cap U\left(x, \frac{1}{2}\right) \cap U\left(x, \frac{1}{3}\right) \cap \cdots$$

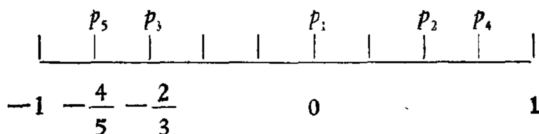
是很明确的,但是,尽管 $U\left(x, \frac{1}{n}\right)$ 是开集,而 x 却不是开集.

对于集合 A, 如果不论取点 x 的什么样的邻域,其中都至少含有一个,因而也就含有无限个与 x 不同的 A 中的点,则称点 x 为集合 A 的**聚点**或**极限点**. A 的聚点有的是 A 的点,也有的不是 A 的点.

例 在 E^1 中; $A = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 是如下的点列,即设

$$p_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

则 A 的聚点为 1 和 -1.



对于**点列** $\{x_n\}$, 若存在点 x 使

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

时,则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**于 x, 并记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

1° 若点列 $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 收敛于点 x, 则点 x 是 A 的唯一的聚点. 其逆并不一定成立.

例 设 E^1 的点列 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是以下式定义的:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = \text{偶数} \\ n, & n = \text{奇数} \end{cases}$$

这样一来，点列 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 具有唯一的聚点 0，但是此点列并不收敛。



有界集合

以原点为中心，作一半径充分大的球时，能够包含于该球中的那样的集合称为**有界集合**.

波尔察诺-维尔斯特拉斯定理：

"E^n 中的有界无限集合至少有一个聚点."

凸集

所谓集合 A 是**凸**的，是指对于任意两点 $x, y \in A$ 及 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，连结 x, y 的线段上的点

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \tag{5}$$

都包含于 A 中(图 1)。

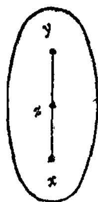


图 1　凸集的例

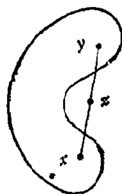


图 2　非凸集的例

例　平面上的三角形、矩形、圆等等都是凸集. 有洼的图形、开了洞的图形以及不连续的图形等，都不是凸集.

1°　任意个凸集的交集仍是凸集.

对于点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，若 $\lambda_i \geqslant 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ 时，则以

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_n \tag{6}$$

表示的点 x 称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**凸组合**

半空间

在 E^n 中,一次不等式

$$a \cdot x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geqslant c \tag{7}$$

的解区域(满足上式的点 x 的集合)以及 $ax \leqslant c$ 的解区域,每一个都称为以**超平面** $ax = c$ 为边界的**闭半空间**. 在不等式中去掉等号,即 $ax > c$ 以及 $ax < c$,则称为**开半空间**. 两者合起来,统称之为**半空间**.

设 A 为凸集,q 为 A 的边界上的点. 所谓通过 q 的超平面是 A 的**支持超平面**,定义为以那个超平面作为边界的半空间包含 A. 这种超平面至少存在一个.

凸集的分离定理 设 A, B 为没有公共内点的两个凸集,则存在分离 A, B 的超平面.

证明 $A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$ 是不以 0 为内点的凸集. 那么,对于 $A - B$ 的任意一点 $x - y$ 有使 $a \cdot (x - y) \geqslant a \cdot 0 = 0$ 的 a 存在.

§2. 模糊集的凸组合

设 A, B, Λ 为任意的模糊集,所谓 A, B, Λ 的**凸组合**,记为 $(A, B; \Lambda)$ 是如下定义的模糊集:

$$(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \bar{\Lambda} B \tag{8}$$

其中,$\bar{\Lambda}$ 是 Λ 的补集.

凸组合 $(A, B; \Lambda)$ 的隶属函数可以表示为

$$\mu_{(A,B;\Lambda)} = \mu_\Lambda(x)\mu_A(x) + [1 - \mu_\Lambda(x)]\mu_B(x), \quad x \in X \tag{9}$$

更一般地,对于 n 个模糊集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,若 n 个模

糊集 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ 满足

$$\mu\Lambda_1 + \mu\Lambda_2 + \cdots + \mu\Lambda_n = 1$$

时，则

$$A = A_1\Lambda_1 + A_2\Lambda_2 + \cdots + A_n\Lambda_n \tag{10}$$

亦即以隶属函数来表示之，为

$$\mu A = \mu_{A_1}\mu\Lambda_1 + \mu_{A_2}\mu\Lambda_2 + \cdots + \mu_{A_n}\mu\Lambda_n \tag{11}$$

这样的模糊集 A 称为依据 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ 的 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的凸组合.

在模糊集的凸组合中成立的基本性质，对所有的 Λ

$$A \cap B \subseteq (A, B; \Lambda) \subseteq A \cup B \tag{12}$$

成立. 这一点从下列的关系式来看是显然的. 对于所有的 $\lambda \in [0, 1]$

$$\min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leqslant \lambda\mu_A(x) + (1-\lambda)\mu_B(x) \leqslant \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

成立. (13)

如果给定的模糊集 C 满足

$$A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$$

则可求出满足 $C = (A, B; \Lambda)$ 的模糊集 Λ. 即由于

$$\mu_C(x) = \mu_\Lambda(x)\mu_A(x) + [1-\mu_\Lambda(x)]\mu_B(x)$$

则可以用

$$\mu_\Lambda(x) = \frac{\mu_C(x) - \mu_B(x)}{\mu_A(x) - \mu_B(x)}, \quad x \in X$$

给出 $\mu_\Lambda(x)$.

§3. 凸 模 糊 集

凸性的概念，可以作为一般凸集的扩张在模糊集的情况

下来讨论．其应用的范围涉及很广．例如，在模式识别，最优化等方面将起着重要的作用。

迄今为止，关于空间X没有给予特别的注意，今后，把空间X作为实欧几里得空间 E^n 来进行研究．

凸模糊集

定义 3.1 所谓模糊集A是**凸的**，是指集合

$$\Gamma_\alpha=\{x\mid\mu_A(x)\geqslant\alpha\} \tag{14}$$

对于 $0<\alpha\leqslant 1$ 的所有的α是凸的．

凸模糊集还可以用隶属函数来定义．

定义 3.2 所谓模糊集A是**凸的**，是指对于X的所有点x_1，x_2，以及区间$[0,1]$中所有的λ

$$\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\min[\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)] \tag{15}$$

都成立。

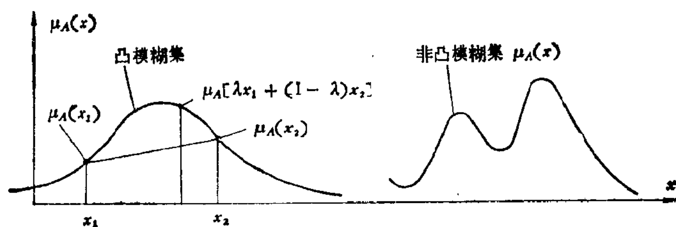


图 3 在 E^1 中的凸及非凸模糊集

另外，这种情形 $\mu_A(x)$ 并非必须是凸函数（详细地说是上凸）[1]．

例 “近似地逼近于 1 的实数”模糊集是凸模糊集（参看图 4）．

1）一般地，所谓函数 f 是上凸的．意思是对于任意的 x_1，x_2 及任意的 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，总满足 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$．

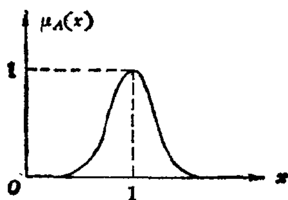


图 4　凸模糊集 $A=\{x|x\approx 1\}$ 的图示

下面证明凸模糊集的定义 3.1 和定义 3.2 是等价的。

(⇒)若模糊集 A 在定义 3.1 的意义下是凸的，设 $\alpha=\mu_A(x_1)\leqslant\mu_A(x_2)$，则 $x_1, x_2\in\Gamma_\alpha$。但是，由于 Γ_α 是凸的，因而 $\lambda_1 x+(1-\lambda)x_2\in\Gamma_\alpha$。所以，

$$
\begin{aligned}
\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]&\geqslant\alpha=\mu_A(x_1)\\
&=\min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]
\end{aligned}
$$

成立。$\mu_A(x_1)\geqslant\mu_A(x_2)$ 的情形也是同样的。

(⇐) 反之，若模糊集 A 在定义 3.2 的意义下是凸的。设 $\alpha=\mu_A(x_1)$，则 Γ_α 可以看成是满足 $\mu_A(x_2)\geqslant\mu_A(x_1)=\alpha$ 的所有的点的集合。根据(15)式，满足 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 的点，仍然在 Γ_α 中，因之，Γ_α 是凸集。

凸模糊集具有下列基本性质。

定理　若模糊集 A, B 是凸的，则它们的交 $A\cap B$ 也是凸的。

证明　令 $C=A\cap B$，则

$$
\begin{aligned}
&\mu_C(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\\
&\quad=\min[\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\\
&\qquad\qquad\mu_B(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)]
\end{aligned}
$$

成立。但是，由于 A, B 是凸的，所以

$$
\begin{aligned}
&\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\\
&\quad\geqslant\min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]
\end{aligned}
$$

$$\mu_B[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \min[\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)]$$

成立。从而

$$\begin{aligned}
\mu_C[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] &\geqslant \min\{\min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)], \\
&\qquad \min[\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)]\} \\
&= \min\{\min[\mu_A(x_1), \mu_B(x_1)], \\
&\qquad \min[\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)]\} \\
&= \min[\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)]
\end{aligned}$$

因此，$C = A \cap B$ 是凸模糊集。

有界模糊集

所谓模糊集 A 是**有界的**，是指对于所有的 $\alpha > 0$，集合 $\Gamma_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$ 是有界的。即，对于每个 $\alpha > 0$，对于在 Γ_α 中所有的 x，Γ_α 被包含于 $\|x\| \leqslant R(\alpha)$ 这样的有限半径 $R(\alpha)$ 的超球之中。

性质 1 设 A, B 为有界模糊集，则其并及交也是有界模糊集。

性质 2 设 A 为有界模糊集，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在着一个超平面 H，在这个超平面 H 的不包含原点那一侧的所有的 x，使 $\mu_A(x) \leqslant \varepsilon$。

证明 设 Γ_ε 为 $\{x | \mu_A(x) \geqslant \varepsilon\}$ 这样的集合，根据有界性的假设，则存在着包含 Γ_ε、半径为 $R(\varepsilon)$ 的超球 S。设支持超球 S 的任意支持超平面为 H，则 H 的不包含原点的那一侧的所有的点都在超球 S 之外或之上。从而，这样的点 x，满足 $\mu_A(x) \leqslant \varepsilon$（参看图 5）。

性质 3 设 A 为有界模糊集，$M = \sup_x \mu_A(x)$，则至少存在一个**本质地达到** M 的点 x_0。所谓"本质地达到"，意思是对于任意的 $\varepsilon > 0$，x_0 的一切邻域都包含集合 $Q(\varepsilon) = \{x|$

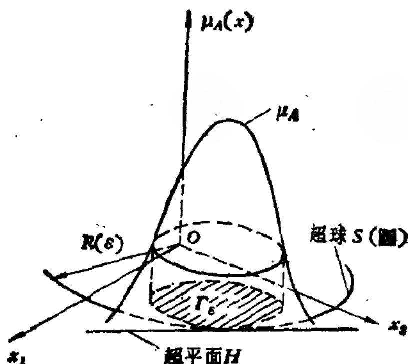


图5 在 E^2 上性质2的说明图

$\mu_A(x) \geqslant M - \varepsilon\}$ 的点。

证明 考虑如下的有界集序列 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n \cdots$。设其中的

$$\Gamma_n = \{x | \mu_A(x) \geqslant M - M/(n+1)\}$$

另外，根据M的定义，对于所有的有限数 n，Γ_n 不是空的。设 x_n 为 $\Gamma_n (n = 1, 2, \cdots)$ 中的任意的点，则点列 $x_1, x_2, \cdots$ 为闭有界集 Γ_1 中的点列，所以，根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理，此点列至少有一个 Γ_1 的聚点。设这一点为 x_0，则 x_0 的所有邻域都包含点列 $x_1, x_2, \cdots$（详细地说是部分点列 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$，这里的 $N \geqslant M/\varepsilon$）中的无限多个点。因此，根据这个部分点列的点属于 $Q(\varepsilon) = \{x | \mu_A(x) \geqslant M - \varepsilon\}$ 而完成了证明。

所谓模糊集A是**严格凸**的，是指对于 $0 < \alpha \leqslant 1$ 的所有的 α，集合 $\Gamma_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$ 是严格凸的[1]。

所谓模糊集A是**强凸**的，是指对于不同的任意两点 x_1，

1）所谓集合 Γ_α 是严格凸的，意思是 Γ_α 中不同的任意两点的中点仍然属于 Γ_α。

x_2，和开区间(0，1)中的任意的 λ，

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \qquad (16)$$

成立的情形。

1° 强凸模糊集，不一定是严格凸模糊集，逆之亦真。

2° 设 A，B 为强(严格)凸模糊集，则它们的交也是强(严格)凸模糊集。

设 A 为有界凸模糊集，$M=\sup_x \mu_A(x)$，那么则有

(1) M 由某点 x_0 达到，亦即存在点 x_0，使 $M=\mu_A(x_0)$ 或者

(2) 如在性质 3 中讲的那样，至少存在一个本质地达到 M 的点 x_0

的某一结论。

如果设 A 为强凸模糊集，若点 x_0 到达 M，则点 x_0 是唯一的。这是因为，假如两个不同的点 x_0，x_1 达到 M，则 $M=\mu_A(x_0)=\mu_A(x_1)$。由于 A 的强凸性，对点 $x=0.5x_0+0.5x_1$，则 $\mu_A(x)>M$，这与假设矛盾。

进而一般地，设本质地达到 M 的点的集合为 $C(A)$，则称 $C(A)$ 为模糊集 A 的**核心**。

那么，在凸模糊集的情形下，对于核心，下面的定理成立。

定理 设 A 为凸模糊集，则其核心为凸集。

证明 如果在不同的两点 x_0，x_1 本质地达到 $M(=\sup_x \mu_A(x))$，那么只要说明 $x=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的所有的点 x，本质地达到 M 就可以。

首先，设轴为通过 x_0，$x_1(x_0\neq x_1)$ 的直线、半径为 ζ 的圆柱为 P。x_0'，x_1' 分别为以点 x_0，x_1 为中心，以 ζ 为半径的球内的点，并且对于 $\varepsilon>0$，满足 $\mu_A(x_0')\geqslant M-\varepsilon$，$\mu_A(x_1')\geqslant M-\varepsilon$。那么，因为 A 是凸模糊集，所以线段 $x_0'x_1'$ 上的任意点 u 满足 $\mu_A(u)\geqslant M-\varepsilon$。又，因为圆柱 P 是凸集合，所

以，线段 $x'_0x'_1$ 上的点都包含于 P. 设线段 x_0x_1 的任意点为 x，则点 x 与线段 $x'_0x'_1$ 的距离小于 ζ. 因此，以 x 为中心、ζ 为半径的球至少包含线段 $x'_0x'_1$ 的一个点. 即至少包含线段 $x'_0x'_1$ 上满足 $\mu_A(w) \geqslant M - \varepsilon$ 的点 w. 因此，点 x 本质地到达 M.

推论 如果模糊集 A 在空间 E^1 上是强凸的，则本质地达到 $M(=\sup_x \mu_A(x))$ 的点只有一个.

凸模糊集的分离定理

关于一般凸集合的分离定理，象在 §1 讲的那样，如果 A，B 是互质的凸集合，则能够引出一个分离超平面 H，它可以使 A 在 H 的一侧，B 在 H 的另一侧. 这个分离定理能否推广到凸模糊集呢？显然，如果凸模糊集是互质的是可以的. 如果不是这种情况会怎么样呢？若进行某种精细加工则是可能的.

首先，作为准备工作，先给出几个定义.

设 A，B 为二有界模糊集，H 为由方程 $h(x)$[1] $= 0$ 定义的超平面. 设 K_H 为对于 H 一侧的所有点 x，满足 $\mu_A(x) \leqslant K_H$ 而在另一侧满足 $\mu_B(x) \leqslant K_H$ 的数. 令 K_H 的下限，即 $\inf K_H$ 为 M_H，则依据有界模糊集 A，B 的超平面的**分离度**定义为

$$D_H = 1 - M_H \tag{17}$$

参看图 6.

一般地，不是以给出的超平面 H 为研究课题，而是考虑在超平面族 $\{H_\lambda\}$ 中找出实现最高分离度的超平面. 设 H_λ 为 E^n 上的超平面，而 λ 在 E^n 中是可变的. 在这种情况下，有界模糊集 A 与 B 的分离度定义为

---

1) 具体地说，是 $h(x) = a \cdot x - c$，参看§1半空间的项目.

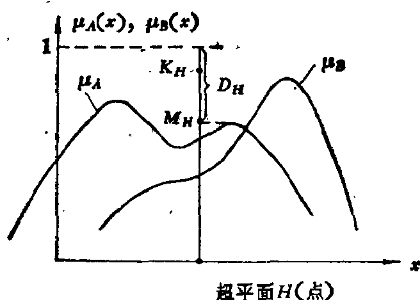


图 6　依据某超平面H的有界模糊集的分离度 $D_H = 1 - M_H$ 的说明

$$D = 1 - \overline{M} \tag{18}$$

这里，$\overline{M} = \inf\limits_{H_\lambda} M_{H_\lambda}$.

上面研究了一般有界模糊集，对于凸模糊集的情形，(18)式的分离度D会变成什么样子呢？下面就来讲讲关于凸模糊集的分离定理。

定理　设 A, B 为 E^n 上的有界凸模糊集，它们的交 $A \cap B$ 的最大等级为 M，即

$$M = \sup_x \min[\mu_A(x), \mu_B(x)],\ \forall x \in X$$

则

(a) 存在着超平面 H，对于在H一侧的所有点 x，$\mu_A(x) \leqslant M$，在另一侧 $\mu_B(x) \leqslant M$.

(b) 不存在满足 (a) 的而实现 $M' < M$（即 $D' > D$）的超平面 H'.

由此，以

$$D = 1 - M$$

给出了有界凸模糊集 A, B 的分离度 D.

证明　考虑下列两种情形就可以。

(1) $M=\min(M_A, M_B)$, (2) $M<\min(M_A,M_B)$，其中

$$M_A=\sup_x\mu_A(x),\ M_B=\sup_x\mu_B(x)$$
$$M=\sup_x\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$
$$=\sup_x\mu_{A\cap B}(x)$$

(1) $M=\min(M_A, M_B)$ 的情形

设 $M_A<M_B$，则 $M=M_A$. 根据已经讲过的有界性的假设，则存在着如下的超平面 H. 即存在着对于H一侧的所有点x使 $\mu_B(x)\leqslant M$，而在另一侧使$\mu_A(x)\leqslant M$ 的超平面 H. 这是因为，对于X上的所有的点 x，$\mu_A(x)\leqslant M_A=M$.

其次，来说明不存在使在 H' 的一侧 $\mu_A(x)\leqslant M'$，在另一侧 $\mu_B(x)\leqslant M'$ 的这样的 $M'(<M)$ 和超平面 H'. 假定这种 H' 和 M' 存在. 设凸模糊集A的核心（本质地到达$M_A=M$ 的点的集合），在 H' 的一侧（令这一侧为正侧），则对于在 H' 正侧的所有点x没有满足 $\mu_A(x)\leqslant M'$ 的可能性. 从而，在关于 H' 负侧的所有点，则应满足 $\mu_A(x)\leqslant M'$ 那么，根据假设在 H' 的正侧的所有点 x，使 $\mu_B(x)\leqslant M'$ 成立. 从而，对于 H' 正侧的所有点x

$$\sup_x\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]\leqslant M'$$

成立. 同样地，对于 H' 负侧的所有点，上式也成立. 从而，对于X的所有的点x上式也成立. 这与

$$\sup_x\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]=M>M',\ \forall x\in X$$

的假设相矛盾.

(2) $M<\min[M_A, M_B]$ 的情形.

考虑凸集合 $\Gamma_A=\{x|\mu_A(x)>M\}$，$\Gamma_B=\{x|\mu_B(x)>M\}$，这些集合非空，并且互质.（如果不是互质，则存在使 $\mu_A(u)>M$，$\mu_B(u)>M$ 的点 u，因而$\mu_A\cap B(u)>M$，这

与 M 的定义 $M=\sup_x\mu_{A\cap B}(x)$ 相矛盾。)

由于 Γ_A,Γ_B 是互质的，所以，根据凸集的分离定理，则 Γ_A 在H的一侧(正侧)，Γ_B 在H的另一侧(负侧)。根据 Γ_A，Γ_B 的定义，则对于H负侧的所有点 x，$\mu_A(x)\leqslant M$ 成立，对于H正侧的所有点 x，$\mu_B(x)\leqslant M$ 成立。又，与(1)同样地，可证明满足 $M'<M$ 的 H' 是不存在的(参看图 7)。

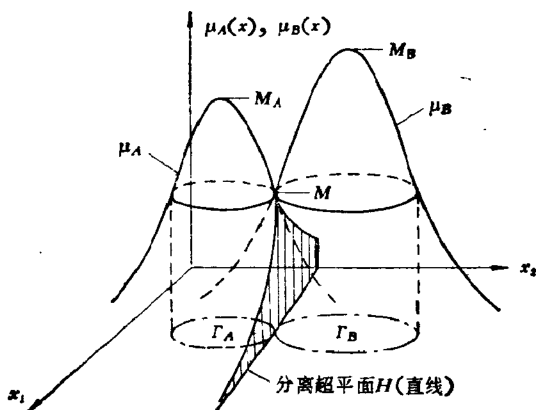


图 7 在 E^2 上凸模糊集分离定理的说明图

在这里，指明了以 $1-M$ 为有界凸模糊集 A，B 的分离度的超平面H是存在的，并且也指明了实现比这更高的分离度的超平面是不存在的。

第四章　模糊集的影

本章讨论由映射产生的模糊集的象和逆象，以及它的特殊情形的模糊集的影、补影．特别是模糊集的影的概念，对于处理以模糊条件为基础的最优化等问题，是很重要的．

§1. 模糊集的象

在通常的集合论中，对于两个空间(集合)X和 Y，如果建立一种规则，按这一规则，对X中的每一元素 x，都有Y中的某一元素y与之对应时，则称此规则为从X到Y的**映射**或**函数**．

设f为映射，对于元素则记为

$$x \xrightarrow{f} y \quad (\text{或} \ y = f(x))$$

对于集合则记为

$$X \xrightarrow{f} Y \quad (\text{或} f: X \to Y)$$

对于X中的子集 A，则

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

为Y中的子集．这个集合称为由f产生的A的**象**．

反之，对于Y中的子集 B，则

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \mid f(x) = y, y \in B\} \\ &= \{f^{-1}(y) \mid y \in B\} \end{aligned}$$

为X中的子集．这个集合称为由f产生的B的**逆象**，f^{-1}称为**逆映射**．

在模糊集中，象与逆象等可定义如下：

定义 1 设 f 为从 X 到 Y 的映射，B 为 Y 中的模糊集，隶属函数为 $\mu_B(y)$，则 B 的逆象（记为 $f^{-1}[B]$）就定义为 X 中的模糊集，而隶属函数对所有的 $x \in X$，满足

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x)) \tag{1}$$

（参见图 1）

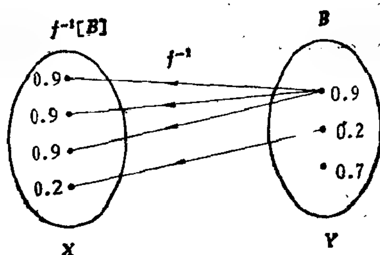


图 1　模糊集 B 的逆象 $f^{-1}[B]$ 之例

设 A 为 X 中的模糊集，隶属函数为 $\mu_A(x)$，$x \in X$，现在来考虑由映射 $f: X \to Y$ 确定的 Y 中的模糊集 B（A 的象）的定义。

映射 f 为一对一的情况是最简单的，亦即设对应于点 x 的点为 $y(=f(x))$，这时可令

$$\mu_B(y) = \mu_A(x)$$

但是，当 f 为多对 1 的情况时，例如，设二点 x_1，$x_2(\in X)$ 对应于点 $y(\in Y)$，并且 $\mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$，那么就会产生歧义。为了解决这个问题，令 $\mu_A(x_1)$，$\mu_A(x_2)$ 中大的一个为 $\mu_B(y)$ 的值，一般地，可以如下定义：

定义 2 设 f 为从 X 到 Y 的映射，A 为 X 中的模糊集，隶属函数为 $\mu_A(x)$，$x \in X$，则 A 的象（记为 $f[A]$）是 Y 中的模糊集，而这个集的隶属函数 $\mu_{f[A]}(y)$ 对于所有的 $y \in Y$，

是由

$$\mu_{f[A]}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_A(x)\}, & f^{-1}(y)\neq\emptyset\\ 0, & f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases}\qquad(2)$$

给出的(参见图2).

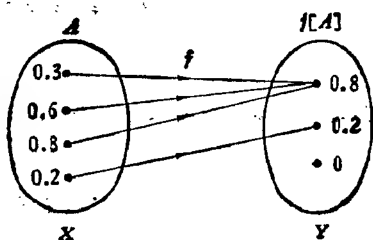


图2　模糊集的象 $f[A]$ 之例

下面，叙述一下由映射确定的模糊集的象和逆象的基本性质. 这里，得到了与一般集合情形相同的结果（参见第一章).

设 f 为从 X 到 Y 的映射，A, A_1, A_2 为 X 中的模糊集，B, B_1, B_2 为 Y 中的模糊集,则

(1)　若 $A_1\subseteq A_2$，则 $f[A_1]\subseteq f[A_2]$

(2)　若 $B_1\subseteq B_2$，则 $f^{-1}[B_1]\subseteq f^{-1}[B_2]$

(3)　$f[A_1\cup A_2]=f[A_1]\cup f[A_2]$

(4)　$f^{-1}[B_1\cup B_2]=f^{-1}[B_1]\cup f^{-1}[B_2]$

(5)　$f[A_1\cap A_2]\subseteq f[A_1]\cap f[A_2]$

(6)　$f^{-1}[B_1\cap B_2]=f^{-1}[B_1]\cap f^{-1}[B_2]$

(7)　$f[\overline{A}]\supseteq\overline{f[A]}$

(8)　$f^{-1}[\overline{B}]=\overline{f^{-1}[B]}$

(9)　$A\subseteq f^{-1}[f(A)]$

(10) $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$

证明

(1) 因为

$$\mu_{f[A_1]}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_1}(x)\}, \ y \in Y$$

$$\mu_{f[A_2]}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_2}(x)\}, \ y \in Y$$

而

$$A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow \mu_{A_1}(x) \leqslant \mu_{A_2}(x), \ x \in X$$

所以

$$\mu_{f[A_1]}(y) \leqslant \mu_{f[A_2]}(y), \ \forall y \in Y$$

因而

$$f[A_1] \subseteq f[A_2]$$

(2) 因为

$$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) = \mu_{B_1}[f(x)], \ x \in X$$
$$\mu_{f^{-1}[B_2]}(x) = \mu_{B_2}[f(x)], \ x \in X$$

而

$$B_1 \subseteq B_2 \Leftrightarrow \mu_{B_1}(y) \leqslant \mu_{B_2}(y), \ \forall y \in Y$$

所以

$$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) \leqslant \mu_{f^{-1}[B_2]}(x), \ \forall x \in X$$

从而

$$f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$$

(3) 因为

$$\mu_{f[A_1 \cup A_2]}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_1 \cup A_2}(x)\}$$

$$= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \max[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)]$$

$$= \max[\sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_1}(x)\},$$

$$\sup_{x\in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_2}(x)\}]^{1)}$$

$$= \max [\mu_{f[A_1]}(y), \mu_{f[A_2]}(y)], \quad y \in Y$$

所以

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$$

(4) 因为

$$\mu_{f^{-1}[B_1 \cup B_2]}(x) = \mu_{B_1 \cup B_2}(f(x))$$
$$= \max[\mu_{B_1}(f(x)), \mu_{B_2}(f(x))]$$
$$= \max[\mu_{f^{-1}[B_1]}(x), \mu_{f^{-1}[B_2]}(x)], \quad \forall x \in X$$

所以

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

(5) 因为

$$\mu_{f[A_1 \cap A_2]}(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_1 \cap A_2}(x)\}$$
$$= \sup_{x\in f^{-1}(y)} \{\min [\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)]\}$$
$$\leqslant \min_{x\in f^{-1}(y)} [\sup \{\mu_{A_1}(x)\}, \sup_{x\in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_2}(x)\}]^{2)}$$
$$= \min [\mu_{f[A_1]}(y), \mu_{f[A_2]}(y)], \quad y \in Y$$

所以

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

---

1) 可由交换律的一般化 $\bigvee_i \bigvee_j a_{ij} = \bigvee_j \bigvee_i a_{ij}$ 导出，但是 $\max [a, b] = a \vee b$.

2) 可由极小极大不等式 $\bigvee_i \left(\bigwedge_j a_{ij}\right) \leqslant \bigwedge_j \left(\bigvee_i a_{ij}\right)$ 导出.

(6) 因为

$$\mu_{f^{-1}[B_1 \cap B_2]}(x) = \mu_{B_1 \cap B_2}(f(x))$$
$$= \min[\mu_{B_1}(f(x)), \mu_{B_2}(f(x))]$$
$$= \min[\mu_{f^{-1}[B_1]}(x), \mu_{f^{-1}[B_2]}(x)], \quad \forall x \in X$$

所以

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$$

(7) 因为

$$\mu_{f[\bar{A}]}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\bar{A}}(x)\}$$
$$= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{1 - \mu_A(x)\}$$
$$= 1 - \inf_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\}$$

但另一方面

$$\mu_{\overline{f[A]}}(y) = 1 - \mu_{f[A]}(y)$$
$$= 1 - \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\}, \quad y \in Y$$

从而

$$\mu_{f[\bar{A}]}(y) \geqslant \mu_{\overline{f[A]}}(y)$$

所以

$$f[\bar{A}] \supseteq \overline{f[A]}$$

(8) 因为

$$\mu_{f^{-1}[\bar{B}]}(x) = \mu_{\bar{B}}(f(x)) = 1 - \mu_B(f(x))$$
$$= 1 - \mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_{\overline{f^{-1}[B]}}(x), \quad \forall x \in X$$

所以

$$f^{-1}[\bar{B}] = \overline{f^{-1}[B]}$$

(9) 因为

$$\mu_{f^{-1}[f[A]]}(x) = \mu_{f[A]}(f(x))$$

$$= \sup_{x\in f^{-1}(f(x))}\{\mu_A(x)\} \geqslant \mu_A(x),\ \forall x\in X$$

从而

$$f^{-1}[f[A]]\supseteq A$$

(10) 若 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$，则

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y)=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_{f^{-1}[B]}(x)\}$$

$$=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_B(f(x))\}=\mu_B(y)$$

但如果

$$f^{-1}(y)=\varnothing，则$$

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y)=0\leqslant\mu_B(y)$$

一般地

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y)\leqslant\mu_B(y),\ \forall y\in Y$$

所以

$$f[f^{-1}[B]]\subseteq B$$

§2. 模糊集的影

在讲述模糊集的影之前，先作一些准备。

令空间X为n维实欧氏空间，其点表示为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

凸模糊集

(1) 所谓E^n中模糊集是凸的，就是集合$\Gamma_\alpha=\{x\mid\mu_A(x)\geqslant\alpha\}$，对于 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 的所有α是凸的。

完全相同，亦可如下定义：

(2) 模糊集是凸的，就是指对于X中所有点 x_1，x_2，以及区间[0,1]中的一切，下式

$$\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\min[\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)] \qquad (3)$$

成立.

凸模糊集的交集,仍然是凸模糊集.

包含模糊集 A 的最小凸模糊集,称为凸包,表示为conv$A$.

凹模糊集

所谓模糊集 A 是凹的,就是指

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \max[\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)] \qquad (4)$$

成立.(参见图 3)

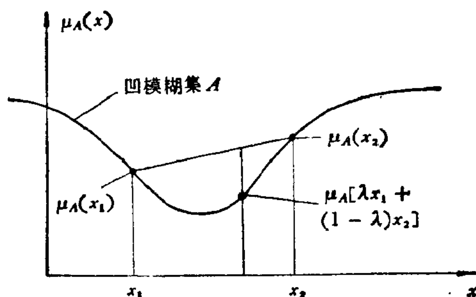


图 3 E^1 中的凹模糊集

1. 凸模糊集的补集是凹模糊集,其逆也成立.

2. 凹模糊集的并集仍然是凹模糊集.

包含在模糊集 A 中最大的凹模糊集,称为凹核,表示为conv$A$.

模糊集的影这一概念,可以作为 §1 中讲过的模糊集的象概念的特殊情形.

欧氏空间 E^n 中的点表示为 $x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, E^n 中的模糊集 A 的隶属函数表示为 $\mu_A(x)=\mu_A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

模糊集的点影

令 p_0 和 H 分别是 E^n 中的点和超平面. 所谓模糊集 A

由点 p_0 到超平面H上的点影，就是H中的一个模糊集，记为$S(A)$。其隶属函数 $\mu_{S(A)}(x)$ 定义如下：

设通过 p_0 点的直线为 L，它与超平面的交点为 h，则

$$\mu_{S(A)}(h)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in L}\mu_A(x), & h\in H\\ 0, & h\notin H\end{cases} \tag{5}$$

点影 $S(A)$，可以考虑为把点 p_0 看作太阳，模糊集A看作云彩的情形下，云彩A投向地面H上的影(参见图 4)。

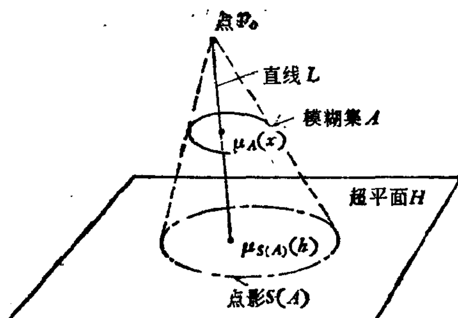


图 4 模糊集A的点影 $S(A)$ 之说明

在点影的定义中，若将(5)式的 sup 改为 inf，便可定义出不同的点影。

补点影

所谓模糊集A到超平面H上的补点影，记为 $C(A)$，可定义为A的补集的点影的补集[1)]，亦即

$$\mu_{C(A)}(h)=\begin{cases}\inf\limits_{x\in L}\mu_A(x), & h\in H\\ 0, & h\notin H\end{cases} \tag{6}$$

从模糊集A到点影 $S(A)$ 的映射 S，可看作为点 p_0 到

1) $1-\sup\limits_{x\in L}[1-\mu_A(x)]=\inf\limits_{x\in L}\mu_A(x)$

H上的A的**点射影**. 当点 p_0 在无限远的情况下,直线 L 垂直于超平面. 这时,点影 $S(A)$、点射影 S 分别称为**直交影**、**正射影**.

点影、直交影统称为影;补点影、直交补影统称为补影.

模糊集的影的一些基本性质是:

1° **齐次性** 令 k_A 为模糊集,隶属函数为

$$\mu k_A(x) = k\mu_A(x) \tag{7}$$

其中, k 为满足 $0 \leqslant k \leqslant 1$ 的常数,显然

$$S(kA) = kS(A) \tag{8}$$

成立.

2° **单调性** 对于两个模糊集 A, B, 若 $A \subseteq B$, 则

$$S(A) \subseteq S(B) \tag{9}$$

3° **分配性** 对任意的模糊集 A, B,

$$S(A \cup B) = S(A) \cup S(B) \tag{10}$$

成立. 但是,对其交集($\cap$),一般地,

$$S(A \cap B) \subseteq S(A) \cap S(B) \tag{11}$$

4° **线性** 由(7),(10),对 $[0,1]$ 中的任意常数 k_1, k_2, 则

$$S(k_1A \cup k_2B) = k_1S(A) \cup k_2S(B) \tag{12}$$

成立,亦即射影 S 是**线性变换**. 此外, S 满足**幂等律**,即

$$S^2(A) = S(S(A)) = S(A) \tag{13}$$

射影保持凸性和凹性不变.

定理 1 设A是 E^n 中的凸模糊集, 则到超平面H上的直交影 $S(A)$ 也是凸模糊集.

证明 只要证明,对H上的 h_1, h_2 和 $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2$, 其中 $\lambda \in [0,1]$, 则

$$\mu_{S(A)}[\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2] \geqslant \min[\mu_{S(A)}(h_1), \ \mu_{S(A)}(h_2)]$$

成立即可。首先，令 L_1, L_2, L 分别为通过点 h_1, h_2, h, 且垂直于H的直线．根据影的定义，有

$$\mu_{S(A)}(h_1) = \sup_{x \in L_1} \mu_A(x) \tag{14}$$

$$\mu_{S(A)}(h_2) = \sup_{x \in L_2} \mu_A(x) \tag{15}$$

$$\mu_{S(A)}(h) = \sup_{x \in L} \mu_A(x) \tag{16}$$

又由上限 sup 的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，使

$$\sup_{x \in L_1} \mu_A(x) - \mu_A(x_1) \leqslant \varepsilon \tag{17}$$

$$\sup_{x \in L_2} \mu_A(x) - \mu_A(x_2) \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

成立的点 $x_1(\in L_1)$, $x_2(\in L_2)$ 各自至少存在一个．但是，因为 A 是凸模糊集，所以，

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \tag{19}$$

成立．于是，由(17)，(18)式可以导出

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \min[\sup_{x \in L_1} \mu_A(x), \sup_{x \in L_2} \mu_A(x)] - \varepsilon \tag{20}$$

然而，由于

$$\mu_{S(A)}(h) = \sup_{x \in L} \mu_A(x) \geqslant \mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \tag{21}$$

成立，故得

$$\mu_{S(A)}(h) \geqslant \min[\mu_{S(A)}(h_1), \mu_{S(A)}(h_2)] - \varepsilon \tag{22}$$

因为 $\varepsilon(>0)$ 可任意小，所以

$$\mu_{S(A)}(h) \geqslant \min[\mu_{S(A)}(h_1), \mu_{S(A)}(h_2)] \tag{23}$$

对凹模糊集的情形，此定理同样成立。

推论1 凹模糊集的直交补影 $C(A)$ 也是凹模糊集.

模糊集的上限和下限

由模糊集到各种超平面的影和补影，能够确定其模糊集的上限和下限. 换言之，在给定出各种影(补影)的情况下，就可以推断出对应于它的模糊集. 这一点，对处理以模糊条件为基础的最优化等问题是很重要的.

设 A 是 E^n 中的模糊集，隶属函数为 $\mu_A(x_1, \cdots, x_n)$，且超平面 H_i 是第 i 坐标面，亦即 $H_i = \{x | x_i = 0\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且 S_i，C_i 分别为到 H_i 上的 A 的影和补影. 它们 (S_i, C_i) 的隶属函数 μ_{S_i}，μ_{C_i} 可由

$$\mu_{S_i}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x_i} \mu_A(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n), & x \in H_i \\ 0, & x \notin H_i \end{cases} \tag{24}$$

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x_i} \mu_A(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n), & x \in H_i \\ 0, & x \notin H_i \end{cases} \tag{25}$$

来给出(参见图 5.6).

由影 S_i、补影 C_i 产生的**圆柱模糊集**，分别表示为 S_i^*，C_i^*，隶属函数分别由下式:

$$\mu_{S_i^*}(x) = \sup_{x_i} \ \mu_A(x_1, \cdots, x_n) x \in E^n \tag{26}$$

$$\mu_{C_i^*}(x) = \inf_{x_i} \ \mu_A(x_1, \cdots, x_n) x \in E^n \tag{27}$$

给出.（参见图 7.8）

根据定义，显然 $C_i^* \subseteq A$，$A \subseteq S_i^*$ 成立. 从而，模糊集 A 被夹在 $C_i^*(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的并集与 $S_i^*(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的交集之间，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i^* \subseteq A \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} S_i^* \tag{28}$$

成立.

例 图 5.6 表示 E^2 上的模糊集 A 的影、补影；图 7.8 表示这些影和补影的圆柱模糊集的一例；图 9.10 表示圆柱模糊

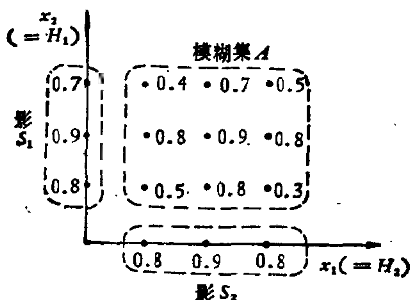


图 5　模糊集 A 到 H_1，H_2 上的影 S_1，S_2

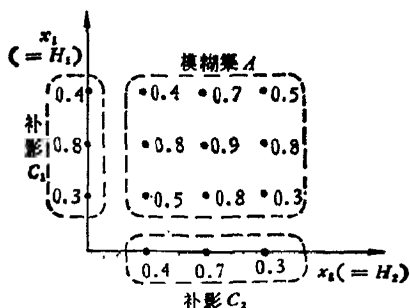


图 6　模糊集 A 到 H_1，H_2 上的补影 C_1，C_2

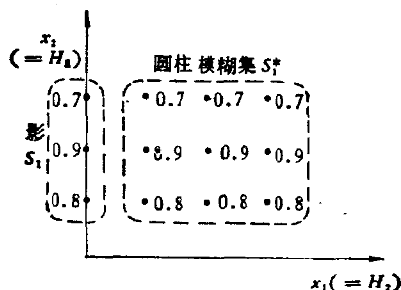


图 7　影 S_1 的圆柱模糊集 S_1^*

集的交集、并集。由此，(28)式

$$C_1^* \cup C_2^* \subseteq A \subseteq S_1^* \cap S_2^*$$

成立。

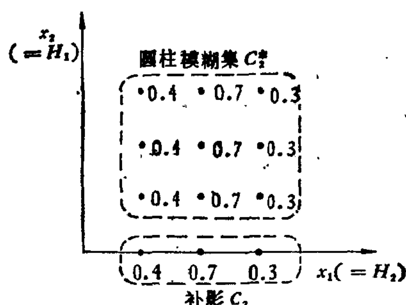


图 8　补影 C_2 的圆柱模糊集 C_2^*

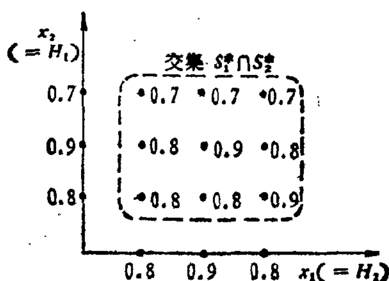


图 9　圆柱模糊集 S_1^*，S_2^* 的交集 $S_1^* \cap S_2^*$

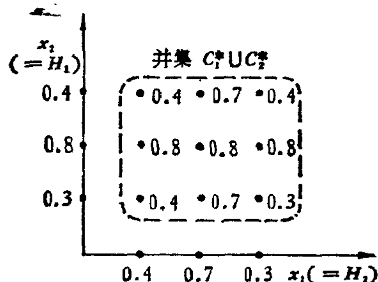


图 10　圆柱模糊集 C_1^*，C_2^* 的并集 $C_1^* \cup C_2^*$

设A是凸或凹模糊集，$\{H_\lambda\}$ 是 E^n 中的所有超平面的集合，则(28)式的等号成立，即

$$\bigcup_\lambda C_\lambda^* = A = \bigcap_\lambda S_\lambda^* \tag{29}$$

定理 2 设 A,B 是凸模糊集，预先固定超平面 H，如果 E^n 所有的点 p_0 的点影满足

$$S(A) = S(B)$$

则

$$A = B$$

同样地，A,B 为凹模糊集，对于补点影也成立.

证明 只要证明：若 $A \neq B$，则使 $S(A) \neq S(B)$ 的点 p_0 存在即可.

设 $A \neq B$，则使 $\mu_A(x_0) \neq \mu_B(x_0)$ 的点 x_0 至少存在一个. 令

$$\mu_A(x_0) = \alpha > \mu_B(x_0) = \beta$$

因为B是凸模糊集，所以 $\Gamma_B = \{x \mid \mu_B(x) > \beta\}$ 也是凸模糊集. 从而，Γ_B 的并且通过点 x_0 的超平面F存在. 对于F上的以及F的不包含 Γ_B 的那一侧的 x，$\mu_B(x) \leqslant \beta$ 成立. 设 p_0 是 F 上任意的点，L是通过 p_0，x_0 的直线(在F上)，与H的交点为 h，则 $\mu_{S(B)}(h) = \sup\limits_{x \in L} \mu_B(x) \leqslant \beta$ 成立. 但是，由于 $\mu_A(x_0) = \alpha$，$x_0 \in L$，所以 $\mu_{S(A)}(h) \geqslant \alpha$. 因此，

$$\mu_{S(A)}(h) \neq \mu_{S(B)}(h)$$

对于$\alpha < \beta$的情形也同样是可以证明的. 此外，对于凹模糊集的情形，也可以用同样的方法证明之.

以上，是关于点影的情形. 关于直交影的情形，有下述定理.

定理 3 设 A，B 是凸模糊集，对于所有的超平面，直交

影 $S(A)$，$S(B)$，如果满足

$$S(A) = S(B)$$

则

$$A = B$$

对于凹模糊集，直交补影的情形也有同样的定理。

在定理 3 中，A,B 限制在凸或凹模糊集，但对一般的模糊集情况又怎样呢？

定理 4 设 A，B 是模糊集，对于所有的超平面 H，直交影如果满足

$$S(A) = S(B)$$

则对于 A,B 的凸包

$$\text{conv}A = \text{conv}B$$

成立。这个定理，对于直交补影及凹核也同样是成立的。

第五章　模糊事件的概率

在第三章“凸模糊集”中，曾指出凸集的分离定理也可以扩张到凸模糊集上去．即，若 A，B 为 n 维欧氏空间 E^n 中的凸模糊集，且它们的交 $A\cap B$ 的最大隶属度为 M，

$$M=\sup_x\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)],\ \forall x\in E^n$$

则，(a) 存在这样的超平面 H，对于在 H 一侧的所有点 x 有 $\mu_A(x)\leqslant M$，而对于另一侧的所有点 x 有 $\mu_B(x)\leqslant M$．

(b) 满足(a)且使得 $M'<M$ 的超平面 H' 不存在．

这一事实说明了凸模糊集 A，B 的分离度 D 可由 $D=1-M$ 给出．

可是，凸模糊集 A，B 在某一超平面上的影 $S(A)$，$S(B)$（显然是凸模糊集，第四章）的分离度是否比 A，B 的分离度大呢？回答是否定的．现在加以说明．

为简单起见，设欧氏空间为 E^2，我们来考虑凸模糊集 A，B 在超平面 $\{x|x_2=0\}$ 上的影 $S(A)$，$S(B)$．影 $S(A)$，$S(B)$ 的隶属函数可分别用

$$\mu_{S(A)}(x_1)=\sup_{x_2}\ \mu_A(x_1,x_2)$$

$$\mu_{S(B)}(x_1)=\sup_{x_1}\ \mu_B(x_1,x_2)$$

给出．可是 A，B 的分离度 D 为

$$\begin{aligned}D&=1-\sup_{(x_1,x_2)\in E^2}\min\ [\mu_A(x_1,x_2),\ \mu_B(x_1,x_2)]\\&=1-\sup_{x_1}\ \sup_{x_2}\ \min\ [\mu_A(x_1,x_2),\ \mu_B(x_1,x_2)]\end{aligned}$$

而影 $S(A)$，$S(B)$ 的分离度 D_S 可用

$$D_S = 1 - \sup_{x_1} \min [\mu_{S(A)}(x_1), \mu_{S(B)}(x_1)]$$
$$= 1 - \sup_{x_1} \min [\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2),$$
$$\sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)]$$

给出．为了证明 $D_S \leqslant D$，只要证明下面事实就可以了．即证明对所有的 x_1 有

$$\sup_{x_2} \min [\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(x_1, x_2)]$$
$$\leqslant \min [\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2),$$
$$\sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)]$$

因为对所有的 x_1

$$\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2) \geqslant \mu_A(x_1, x_2)$$
$$\sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2) \geqslant \mu_B(x_1, x_2)$$

成立，所以对所有的 x_1

$$\min [\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2), \sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)]$$
$$\geqslant \min [\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(x_1, x_2)]$$

成立．因而 $D_S \leqslant D$ 成立．

上面说明了关于模糊集的影的基本事实，它在模式识别及最优化等问题的处理中起着重要的作用．模糊集中影的概念对应于概率论中的边际分布．

下面，我们来叙述模糊事件上的概率测度．

§1. 引　言

在日常生活中，我们经常遇到不明确肯定的事件，即不分明事件．比如，经常说

"她6点左右来"

"扔20次硬币，正面多出了几次"

"明天暖和"

这里带有～～～的词表示不分明的意思. 可是，在概率论中处理的事件不是这样不分明定义的事件，而是明确定义的事件，查德教授以模糊集的概念为基础，对这种不确切定义的事件，即模糊事件的概率测度给出了定义. 根据这个定义，扩张了模糊事件的独立、条件概率、均值、方差、熵等概念. 可以设想，这种扩张将把概率论，尤其是信息论以及与它们有关分支的应用范围更加扩大.

在概率论中，所谓**事件** A 就是样本空间 Ω 的子集所构成的 **σ-域** $\mathfrak{A}$ 中的元素. 而**概率测度** P 就是**可测空间** $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上的正规化测度. 即 P 是定义在 $\mathfrak{A}$ 中各事件 A 上的具有下列性质的实值函数 $P(A)$.

(1°) 对 $\mathfrak{A}$ 中所有的 A

$P(A) \geqslant 0$

(2°) $P(\Omega) = 1$

(3°) P 是**可列可加的**，即，若设 $\{A_i\}$ 是互斥事件的集合，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$P(A)$ 称为事件 A 的**概率**. 三元组 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ 称为**概率空间**.

事件及事件的概率是概率论中最基本的概念. 如上所述，所谓事件被看做是样本空间中清清楚楚确定的点的集合. 可是在实际中经常看到的却是前面所说的不分明的事件. 在下一节我们将说明，用模糊集的概念，也可以把上面定义的事件及其概率的概念，很容易地扩张到模糊事件上去.

现在,说明一下上面提到的 σ-域的概念. 设Ω为一个集合, $\mathfrak{A}$ 为由Ω的若干子集组成的集类. 若 $\mathfrak{A}$ 满足下列的(1°),(2°),(3°),则 $\mathfrak{A}$ 称为 **σ-域**或**完全可加类**.

(1°) $\Omega\in\mathfrak{A}$

(2°) 若 $A\in\mathfrak{A}$, 则 $\bar{A}\in\mathfrak{A}$

(3°) 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{A}$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathfrak{A}$

若 $\mathfrak{A}$ 为 σ-域, 则 $\mathfrak{A}$ 的元素A称为 **$\mathfrak{A}$-可测集**或 **$\mathfrak{A}$-事件**. 在省略"$\mathfrak{A}$-"也能明白的时候,就简单地称为**可测集**或**事件**. Ω 和 $\mathfrak{A}$ 合起来所组成的组 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 称为可测空间.

§2. 模 糊 事 件

首先,把通常的事件的概率规范化,然后说明以此为基础容易定义模糊事件的概率.

为简单起见,设样本空间Ω为n维欧氏空间 R^n. 概率空间用 $(R^n, \mathfrak{A}, P)$ 表示. 这里 $\mathfrak{A}$ 是 R^n 中的**波赖尔集**的σ-域, P是 R^n 上的概率测度. 另外, R^n 中的点用x表示.

包含n维欧氏空间 R^n 中的全体开集的《最小》的 σ-域称为 R^n 中的**波赖尔集类**,其中元素称为**波赖尔集**. 显然,波赖尔集是可测集. 不用说, 开集、闭集是波赖尔集. 粗略地说,波赖尔集不外是从开集出发,至多可列次地进行求它们的和集、交集、余集的运算所得到的集合. 由于开集的余集是闭集, 所以也可以把从闭集出发将这样的运算进行至多可列次所得到的集合称为波赖尔集.

若设 $A\in\mathfrak{A}$, 则事件A的概率 $P(A)$ 如所熟知的那样,用

$$P(A)=\int_A dP \tag{1}$$

表示。可将其改写为

$$P(A)=\int_{R^n} C_A(x)dP=E(C_A) \tag{2}$$

这里 C_A 是事件A的特征函数。即

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

由(2)式可知事件A的概率是A的特征函数 C_A 的期望值 $E(C_A)$。

为论述方便，只考虑一维的情形，对后面的论述也没有妨碍。例如，在连续的情形，若 $\frac{dP}{dx}=p(x)$ 存在，则(1)，(2)也可写成

$$P(A)=\int_A p(x)dx=\int C_A(x)p(x)dx$$

这里 $p(x)$ 是概率密度函数。而在离散的情形，则写成

$$P(A)=\sum_{x_i\in A} p(x_i)=\sum_{x_i} C_A(x_i)p(x_i)$$

我们将利用这一事实，用模糊集的概念容易地定义模糊事件的概率。

现在对于模糊集稍加说明。R^n 中的模糊集A是用隶属函数 $\mu_A:R^n\to[0,1]$ 表示其特征的集合。比如，R^1 中的模糊集 $A=\{x|x\gg 0\}$，带有主观性地可用隶属函数

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

表示其特征。

下面我们定义模糊事件的概率.

定义 设 $(R^n, \mathfrak{A}, P)$ 是概率空间. 这里 $\mathfrak{A}$ 是 R^n 中波赖尔集所构成的 σ-域, P 是 R^n 上的概率测度. 这样, 所谓 R^n 中的**模糊事件**就是隶属函数 μ_A 为**波赖尔可测**的模糊集 A.

一般地, 设 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 为可测空间, 如果 Ω 上的实值函数 $f(x)$ 对于任意的实数 α, 有

$$\{x|f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$$

即 $\{x|f(x) \leqslant \alpha\}$ 为可测集时,则 $f(x)$ 称为 **$\mathfrak{A}$-可测函数**或称为**随机变数**. 当 $\mathfrak{A}$ 为 n 维波赖尔集类时, $f(x)$ 称为 R^n 上的**波赖尔可测函数**.

这样一来,模糊事件 A 的概率可用下面的**勒贝格-斯蒂尔吉斯积分**表示

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) dP = E(\mu_A) \tag{3}$$

关于勒贝格积分及更一般的测度论,由于篇幅的关系,在这里不作介绍,读者可参看有关的参考书.

因此,如同(2), 模糊事件的概率可看做是隶属函数的期望值. 勒贝格-斯蒂尔吉斯积分的存在是由 μ_A 为波赖尔可测这一假定来保证的.

根据模糊事件及其概率的定义, 可以用模糊集的概念把概率论、信息论以及与它们有关分支中的很多结果加以推广. 在很多情况下这种推广可以容易做到. 下面用几个简单例子说明这一点.

首先,把在论述中要用到的,与模糊集有关的基本事实归纳一下. 详细叙述请参考第二章的"模糊集".

包 含 $A \subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x) \ \forall x$ (4)

相 等 $A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \forall x$ (5)

余　集　$\overline{A} \Longleftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \ \forall x$ (6)

和　$A \cup B \Longleftrightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \ \forall x$ (7)

交　$A \cap B \Longleftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \ \forall x$ (8)

代数积　$AB \Longleftrightarrow \mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \ \forall x$ (9)

代数和　$A \oplus B \Longleftrightarrow \mu_{A\oplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \ \forall x$ (10)

如下定义模糊集A的水平集合 $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \tag{11}$$

当对一切 α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$)，水平集合 $A(\alpha)$ 为波赖尔集时，称模糊集A为**波赖尔模糊集**．由于模糊事件的隶属函数是波赖尔可测的，所以模糊事件的一切水平集合都是波赖尔集．因此，模糊事件是波赖尔模糊集．

若函数 μ_A，μ_B 是波赖尔可测的，则易知 $\mu_A + \mu_B$，$\mu_A\mu_B$，$\max[\mu_A, \mu_B]$ 等也是波赖尔可测的．更一般地，对无限多个波赖尔可测函数，上述事实也成立．因此可知，与波赖尔集的情形一样，波赖尔模糊集关于运算(6)，(7)，(8)构成σ-域．

根据(3)—(10)，我们来叙述模糊事件的概率的基本性质．

首先，由(4)式可直接导出

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B) \tag{12}$$

同样地由(7)—(10)得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)^{1)}. \tag{13}$$

$$P(A \oplus B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{14}$$

---

1) 一般地，对任意x下面等式成立

$$\mu_{A\cup B}(x) + \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$$

更一般地,用归纳法可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i}^{m} P(A_i)$$

$$-\sum_{i,j}{}' P(A_i\cap A_j)+\cdots$$

$$+(-1)^{m+1}P\left(\bigcap_{i}^{m} A_i\right)^{1)} \quad (15)$$

$$P(A_1\oplus\cdots\oplus A_m)=\sum_{i}^{m} P(A_i)$$

$$-\sum_{i,j}{}' P(A_iA_j)+\cdots$$

$$+(-1)^{m+1}P(A_1\cdots A_m) \quad (16)$$

例如

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(A\cap B)-P(B\cap C)$$

$$-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

同样地,由(13),(14)可得推广到模糊事件上的布尔不等式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (17)$$

$$P(A_1\oplus A_2\oplus\cdots)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (18)$$

下面叙述模糊事件的独立. 设 A, B 为概率空间 $(R^n$, $\mathfrak{A}$, $P)$ 中的模糊事件,那么,当

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad (19)$$

成立时,称 A, B 是**独立**的.

在定义事件独立时, 不是采用交 $A\cap B$, 而是采用了代

1) Σ' 表示对不同组的和。

数积 AB，这一点要注意.

由上述定义可得如下结论. 现在就一般情形进行叙述. 设 $\Omega_1 = R^n$, $\Omega_2 = R^m$，而 P 为直积测度 $P_1 \times P_2$. 这里 P_1, P_2 分别为 Ω_1, Ω_2 中的概率测度. 并且设 A_1, A_2 分别为用隶属函数 $\mu_{A_1}(x_1,x_2) = \mu_{A_1}(x_1)$, $\mu_{A_2}(x_1,x_2) = \mu_{A_2}(x_2)$ 表示其特征的 Ω_1, Ω_2 中的模糊事件. 由富比尼定理可得下式[1]

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mu_{A_1}(x_1,x_2)d(P_1 \times P_2) \\
&= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} \mu_{A_1}(x_1, x_2)dP_1\right)dP_2 \\
&= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} \mu_{A_1}(x_1)dP_1\right)dP_2 \\
&= \int_{\Omega_2} P_1(A_1)dP_2 \\
&= P_1(A_1)
\end{aligned}
$$

同样可得 $P(A_2) = P_2(A_2)$.

还有

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2) &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mu_{A_1A_2}(x_1,x_2)d(P_1 \times P_2) \\
&= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mu_{A_1}(x_1, x_2)\mu_{A_2}(x_1, \\
&\qquad x_2)d(P_1 \times P_2) \\
&= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mu_{A_1}(x_1)\mu_{A_2}(x_2)d(P_1 \times P_2) \\
&= \int_{\Omega_1} \mu_{A_1}(x_1)dP_1 \\
&\qquad \cdot \int_{\Omega_2} \mu_{A_2}(x_2)dP_2
\end{aligned}
$$

---

1) 鹤见茂：概率论，p58—p60，至文堂.

$$= P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2)$$

于是有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \tag{20}$$

因此,模糊事件 A_1, A_2 在式(20)的意义下是独立事件. 若使用 $P(A_1 \cap A_2)$ 代替 $P(A_1A_2)$ 定义独立性,则式(20)将不成立. 还有,要注意模糊事件的独立,即隶属函数的独立对应随机变数的独立.

下面说明模糊事件的条件概率. 根据式(19), 已知 B 时 A 的**条件概率**由

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{21}$$

定义. 其中 $P(B) > 0$.

由此,如果模糊事件 A, B 独立, 则与通常事件的独立时一样,可导出

$$P(A/B) = P(A) \tag{22}$$

下面把概率论及信息论中均值、方差、熵这些最基本的概念也扩张到模糊事件的情形中去.

关于概率测度 P 的模糊事件 A 的**均值**可如下给出

$$m_P(A) = \frac{\int_{R^n} x\mu_A(x)dP}{\int_{R^n} \mu_A(x)dP}$$
$$= \frac{1}{P(A)}\int_{R^n} x\mu_A(x)dP \tag{23}$$

这里, $\mu_A(x)$ 是 A 的隶属函数, $P(A)$ 起正规化的作用.

同样地, R^1 中模糊事件的**方差**定义为

$$G_P^2(A) = \frac{1}{P(A)}\int_{R^1} (x - m_P(A))^2\mu_A(x)dP \tag{24}$$

模糊事件的方差与均值的关系和随机变数的方差与均值的关系形式上一样。即

$$G_P^2(A) = M^2{}_P(A) - m_P^2(A) \tag{25}$$

其中

$$M_P(^2A) = \frac{1}{P(A)}\int_{R^1} x^2 \mu_A(x) dP$$

现在证明式(25)。

$$\begin{aligned}
G_P^2(A) &= \frac{1}{P(A)}\int_{R^1} (x - m_P(A))^2 \mu_A(x) dP \\
&= \frac{1}{P(A)}\left[\int_{R^1} x^2 \mu_A(x) dP \right.\\
&\quad - 2m_P(A)\int_{R^1} x\mu_A(x) dP \\
&\quad \left. + m_P^2(A)\int_{R^1} \mu_A(x) dP\right] \\
&= \frac{1}{P(A)}\int_{R^1} x^2 \mu_A(x) dP - m_P^2(A) \\
&= M_P(^2A) - m_P^2(A)
\end{aligned}$$

下面说明模糊事件的熵。在信息论中熵的定义是如下给出的。设 x 为取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的随机变数，其各个发生的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。则 x 的熵，也就是分布 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ 的"不肯定程度"由

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{26}$$

给出。

关于概率分布 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 中模糊事件 A 的熵由

$$H^P(A) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) p_i \log p_i \tag{27}$$

给出。

显然，若对一切 $x_i(i=1,\cdots,n)$，$\mu_A(x_i)=1$，即若 $A=\{x_1,\cdots,x_n\}$，则式(27)还原为式(26)。

直观上，$H^P(A)$ 表示了模糊事件 A 的不确定程度。

设 x，y 分别是以 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$，$Q=\{q_1,\cdots,q_m\}$ 为概率分布的随机变数。在 x,y 的联合熵中最基本的事实是，若 x 与 y 独立，则

$$H(x,y)=H(x)+H(y) \tag{28}$$

成立。

对于独立的模糊事件，作为(28)式的推广可以求得

$$H^{PQ}(AB)=P(B)H^P(A)+P(A)H^Q(B) \tag{29}$$

这里

$$PQ=\{p_iq_j\} \qquad i=1,\cdots,n,$$
$$j=1,\cdots,m$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)p_i$$

$$P(B)=\sum_{j=1}^{m}\mu_B(y_j)q_j$$

$$H^P(A)=-\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)p_i\log p_i$$

$$H^Q(B)=-\sum_{j=1}^{m}\mu_B(y_j)q_j\log q_j$$

显然当 $A=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$B=\{y_1,\cdots,y_m\}$ 时，式(29)变成式(28)。

现在证明式(29)。

$$H^{PQ}(AB)=-\sum_{i,j}\mu_{AB}(x_i,y_j)p(i,j)\log p(i,j)$$

由于模糊事件 A,B 是独立的，所以有

$$\mu_A(x_i, y_j) = \mu_A(x_i)$$
$$\mu_B(x_i, y_j) = \mu_B(y_j)$$
$$p(i, j) = p_i q_j.$$

因此，

$$\begin{aligned}
H^{PQ}(AB) &= -\sum_{i,j} \mu_A(x_i)\mu_B(y_j) \\
&\quad \cdot p_i q_j \log(p_i, q_j) \\
&= -\sum_{i,j} \mu_A(x_i)\mu_B(y_j) \\
&\quad \cdot p_i q_j [\log p_i + \log q_j] \\
&= -\sum_i \mu_A(x_i) p_i \log p_i \\
&\quad \cdot \sum_j \mu_B(y_j) q_j \\
&\quad - \sum_j \mu_B(y_j) q_j \log q_j \\
&\quad \cdot \sum_i \mu_A(x_i) p_i \\
&= P(B)H^P(A) + P(A)H^Q(B)
\end{aligned}$$

上面基于模糊事件的概率测度，叙述了概率论等理论中的种种结果的推广．这种推广虽然只不过是在数式上使用了隶属函数，但是，它能使得概率论，信息论以及与其有关分支的应用范围更进一步扩大．

第六章　模糊拓扑空间

C. L. 张 (C. L. Chang) 运用模糊集的概念，定义了作为一般拓扑空间扩充的模糊拓扑空间.

在这里我们要说明一般拓扑空间最基本的概念：开集、闭集、邻域、点列、连续性、紧性等在模糊拓扑空间是怎样扩充定义的. 例如，关于在模糊拓扑空间，由点的邻域到模糊集合的邻域，由点列到模糊集合列等等所进行的定义.

关于一般的拓扑空间，可参阅有关的参考书. 在这里我们要尽可能地和一般的拓扑空间的教材平行地进行讨论. 对照着进行讨论，易于理解一般拓扑空间的各种性质在模糊拓扑空间变成了什么样子.

§ 1. 模糊拓扑空间

现在我们来定义模糊拓扑空间.

定义 1.1　所谓**模糊拓扑**，是指满足下列三个条件的X上的模糊集族 $\mathfrak{T}$:

1°　ϕ, $X\in\mathfrak{T}$

2°　若 $A, B\in\mathfrak{T}$, 则 $A\cap B\in\mathfrak{T}$

3°　若 $A_i\in\mathfrak{T}\ (i\in I)$, 则 $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathfrak{T}$

这时，X 称为模糊拓扑 $\mathfrak{T}$ 的**空间**，$\mathfrak{T}$ 称为X 的**模糊拓扑**. 组 $(X, \mathfrak{T})$ 称为**模糊拓扑空间**. $\mathfrak{T}$ 的元称为关于 $\mathfrak{T}$ 的**开模糊集**或者 $\mathfrak{T}$-**开模糊集**. 所谓模糊集关于 $\mathfrak{T}$ **是闭的**，是

指其补集关于 $\mathfrak{T}$ 是开的．后文，没有特殊需要标明 $\mathfrak{T}$ 时，则把 $\mathfrak{T}$-开 ($\mathfrak{T}$-闭)模糊集简单地称为开(闭)模糊集．

和一般拓扑的情况同样，当 $\mathfrak{T}=\{\phi, X\}$ 时，称为**平凡模糊拓扑**，而X上的所有的模糊集构成的族 $\mathfrak{T}$ 称为**离散模糊拓扑**．

一般地，对两个模糊拓扑 $\mathfrak{T}_1$，$\mathfrak{T}_2$，当 $\mathfrak{T}_1\subseteq\mathfrak{T}_2$ 时，则称 $\mathfrak{T}_1$ 比 $\mathfrak{T}_2$ **粗疏**，$\mathfrak{T}_2$ 比 $\mathfrak{T}_1$ **精密**．例如，平凡模糊拓扑最粗疏，离散模糊拓扑最精密．

下面说明一下邻域．

定义 1.2 在模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 中，所谓模糊集U是模糊集A的**邻域**，是指U包含着含有A的开模糊集[1]．即存在着使 $A\subseteq O\subseteq U$ 的开模糊集 O．特别地，包含A的那样的任意的开模糊集都是A的邻域．包含A的开模糊集称为A的**开邻域**．

A的所有的邻域的集合，称为A的**邻域系**，以 $\mathfrak{U}(A)$ 来表示．

若 $\mathfrak{U}(A)$ 的子集 $\mathfrak{U}^*(A)$，对于任意的 $U\in\mathfrak{U}(A)$，都存在使 $V\subseteq U$ 的 $V\in\mathfrak{U}^*(A)$ 时，则称 $\mathfrak{U}^*(A)$ 为A的**基本邻域系**或者**邻域系的基**．

基本邻域系满足下列的性质:

1° 对于所有的 $V\in\mathfrak{U}^*(A)$，$A\subseteq V$．

2° 对于任意的 V_1，$V_2\in\mathfrak{U}^*(A)$，存在着使 $V_3\subseteq V_1\cap V_2$ 的 $V_3\in\mathfrak{U}^*(A)$．

3° 对于任意的 $V\in\mathfrak{U}^*(A)$ 和任意的模糊集 $B\subseteq V$，存在着使 $W\subseteq V$ 的 $W\in\mathfrak{U}^*(B)$．

---

1) 请注意这里说的不是点的邻域而是模糊集的邻域．关于O在模糊集的情形下，$x\in O$ 的写法没有意义．这是因为，在模糊集中，是以属于与否不能清楚判断的元素为对象的．

关于模糊拓扑空间 $(X,\mathfrak{T})$，X 上每个模糊集 A，具有由至多可数个模糊集构成的基本邻域系 $\mathfrak{U}^*(A)=\{V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots\}$ 时，则称模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 满足**第一可数公理**。

定理 1.1 模糊集 A 为开模糊集的充分必要条件，是对于包含于 A 的每个模糊集 B，A 都是 B 的邻域。

证明 $(\Longrightarrow)$是显然的.

$(\Longleftarrow)$ 由于 $A\subseteq A$，根据邻域的假设，则存在使 $A\subseteq O\subseteq A$ 的开模糊集 O. 因此，$A=0$，A是开模糊集.

定理 1.2 (1) 若 $\mathfrak{U}$ 为模糊集的邻域系，则 $\mathfrak{U}$ 的有限个元的交还是 $\mathfrak{U}$ 的元。(2) 包含 $\mathfrak{U}$ 的元的任何模糊集也都是 $\mathfrak{U}$ 的元。

证明 (1) 设 R，S 为模糊集 A 的邻域，则存在包含于 R, S 的 A 的开邻域 R_0，S_0. 因为 $R\cap S$ 包含着开邻域 $R_0\cap S_0$，所以是 A 的邻域. 因此，$\mathfrak{U}$ 的两个(从而，有限个)元的交集还是 A 的元. (2)若模糊集 R 包含 A 的邻域，则显然，R 包含 A 的开邻域. 从而，R 是 A 的邻域。

定义 1.3 设模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 中的模糊集为 A，B，并且 $B\subseteq A$，所谓 B 是 A 的**内部模糊集**，是指 A 为 B 的邻域. A 的所有的内部模糊集的并集称为 **A 的内部**，以 A^O 表示。

定理 1.3 设 A 为模糊拓扑空间 $(X,\mathfrak{T})$ 上的模糊集，则

(1) A^O 为开模糊集，并且是包含于 A 的最大的开模糊集.

(2) A 为开模糊集的充分必要条件是 $A=A^O$.

证明 (1) 根据定义 1.3，A^O 显然是 A 的内部模糊集. 因此，A 是 A^O 的邻域. 从而，存在使 $A^O\subseteq O\subseteq A$ 的开模糊集 O. 但是，由于 O 是 A 的内部模糊集，所以 $O\subseteq A^O$. 从而，

$A^O = O$。因此，A^O 是开模糊集，并且是包含于A的最大开模糊集。(2) 设A为开模糊集，由于A自身是A的内部模糊集，所以 $A \subseteq A^O$。因此 $A = A^O$。其逆，由(1)可知是显然的。

§2. 模糊集列[1)]

定义 2.1 (1) 所谓模糊集列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ **包含于**模糊集 A，是指对于所有的 n，有 $A_n \subseteq A$.

(2) 所谓列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ **终究**包含于A，是指存在着 m，若 $n \geqslant m$，则 $A_n \subseteq A$.

(3) 所谓列**频频**包含于 A，是指对于任意的 m，存在着使 $n \geqslant m$ 且 $A_n \subseteq A$ 的 n.

(4) 所谓一个列在模糊拓扑空间**收敛**于模糊集 A，是指这个列终究包含于A的任何邻域.

定义 2.2 所谓模糊集合列 $\{B_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是模糊集合列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 的**子列**，是指存在着满足下列的1°，2° 的从自然数集到自然数集的映射N

1° 对于所有的 i

$$B_i = A_{N(i)}$$

2° 对于任意的 n，存在着 i'，当 $i \geqslant i'$ 便有 $N(i) \geqslant n$.

由这个定义可知，若 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 终究包含于A，则其子列 $\{B_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 也终究包含于 A.

定义 2.3 在模糊拓扑空间中，所谓模糊集A是模糊集列的**聚值模糊集**，是指这个列频频包含于A的任何邻域.

1) 对应于一般拓扑空间中的点列的概念.

定理 2.1 若模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 满足第一可数公理，则

(1) 模糊集 A 是开模糊集的充分必要条件，是收敛于使 $B \subseteq A$ 的模糊集 B 的任何模糊集列 $\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$，也终究包含于 A。

(2) 若 A 为模糊集列 $\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$ 的聚值模糊集，则存在收敛于 A 的子列。

证明 (1) ($\Longrightarrow$)设 A 为开模糊集，则 A 是 B 的邻域。从而，收敛于 B 的模糊集列 $\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$ 终究包含于 A($=B$ 的邻域)。

($\Longleftarrow$) 设使 $B \subseteq A$ 的模糊集 B 的基本邻域系为

$$\mathfrak{U}^*(B)=\{U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots\}.$$

令 $V_n=\cap\{U_i, i=1, \cdots, n\}$，则 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n \cdots\}$ 也是 B 的基本邻域系，且 $V_n \supset V_{n+1}$。从而，$V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$ 终究包含于 B 的任何邻域。即 $V_1, \cdots, V_n, \cdots$ 收敛于 B。从而，存在着对于 $n \geqslant m$ 使 $V_n \subseteq A$ 的 m。由于 V_n 是 B 的邻域，则 A 是 V_n 的邻域。根据定理 1.1，则 A 为开模糊集。

(2) 设 $\{R_1, \cdots, R_n, \cdots\}$ 为 A 的基本邻域系，$S_n=\cap\{R_i, i=1, 2, \cdots, n\}$，则 $S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 为 $S_n \supset S_{n+1}$ 的模糊集列。另外，对于所有的 i，取 $N(i) \geqslant i$ 且 $A_{N(i)} \subseteq S_i$ 的整数 $N(i)$，那么，$\{A_{N(i)}, i=1, 2, \cdots\}$ 是 $\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$ 的子列，并收敛于 A。

§3. F-连续函数

在这一节，我们定义 F-连续函数，使连续性的概念一般化。

首先，复习一下由映射引出的模糊集．其详细内容请参看第四章模糊集的影．

定义 3.1 设 f 为从 X 到 Y 的函数，B 为 Y 上的模糊集，其隶属函数为 $\mu_B(Y)$, $y \in Y$．所谓 B 的**逆象**(记为 $f^{-1}[B]$)，是指 X 上的模糊集，其隶属函数由下式给出:

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x)), \quad \forall x \in X$$

反之，设 A 为 X 上的模糊集，其隶属函数为 $\mu_A(x)$，$x \in X$．所谓 A 的**象**(记为 ($f[A]$)，是指 Y 上的模糊集，其隶属函数是如下给出的．对于所有的 $y \in Y$．

$$\mu_{f[A]}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(x)\}, & f^{-1}[y] \neq \phi \\ 0, & f^{-1}[y] = \phi \end{cases}$$

这里的 $f^{-1}[y] = \{x \mid f(x) = y\}$

在第四章曾讲过模糊集的象及逆象的基本性质．这里再做一点扩充，归纳起来则成为如下的定理:

定理 3.1 设 f 为从 X 到 Y 的函数，A，A_1，A_2 为 X 上的模糊集，B，B_1，B_2 为 Y 上的模糊集．那么

(a) 若 $A_1 \subseteq A_2$，则 $f[A_1] \subseteq f[A_2]$

(b) 若 $B_1 \subseteq B_2$，则 $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$

(c) $f[\bar{A}] \supseteq \overline{f[A]}$

(d) $f^{-1}[\bar{B}] = \overline{f^{-1}[B]}$

(e) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

(f) $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$

(g) 设 f 为从 X 到 Y 的函数，g 为从 Y 到 Z 的函数．则对于 Z 上的任意的模糊集 C 有

$$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$$

这里的 $g \circ f$ 是 g 与 f 的合成函数．

证明 在第四章已做过 (a)～(f) 的证明，这里进行 (g)

的证明. 对于所有的 $x \in X$

$$\mu_{(g\circ f)^{-1}[C]}(x) = \mu_C[(g\circ f)(x)] = \mu_C[g[f(x)]]$$
$$= \mu_{g^{-1}[C]}[f(x)] = \mu_{f^{-1}[g^{-1}[C]]}(x)$$

下面定义 F-连续函数.

定义 3.2 所谓从模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 到模糊拓扑空间 $(Y, \mathfrak{S})$ 的函数 f 是 F-**连续**的，是指 Y 上的各开模糊集 B 的逆像 $f^{-1}[B]$ 是 X 上的开模糊集.

显然，下面的定理成立.

定理 3.2 设 f 为从 X 到 Y 的 F-连续函数， g 为从 Y 到 Z 的 F-连续函数，则合成函数 $g\circ f$ 为从 X 到 Z 的 F-连续函数。

证明 对于 Z 上的每个模糊集 C，有 $(g\circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$. 由于 g, f 为 F-连续函数，所以，若 C 为开模糊集，则 $g^{-1}[C]$ 为开模糊集，从而，$f^{-1}[g^{-1}[C]]$ 也是开模糊集. 因此，$(g\circ f)^{-1}[C]$ 是开模糊集.

定理 3.3 设 X, Y 为模糊拓扑空间，f 为从 X 到 Y 的函数. 则后面的条件 (a), (b), (c), (d), (e) 具有如下的关系:

1° (a) $\Leftrightarrow$ (b)

2° (c) $\Leftrightarrow$ (d)

3° (a) $\Rightarrow$ (c)

4° (d) $\Rightarrow$ (e)

其中，

(a) 函数 f 是 F-连续的.

(b) 对于 Y 上的任意的闭模糊集 B，逆象 $f^{-1}[B]$ 是 X 上的闭模糊集.

(c) 设 A 是 X 上的任一模糊集，这时，对于象 $f[A]$ 的任意的邻域 V，$f^{-1}[V]$ 是 A 的邻域.

(d) 对于X上的任意的模糊集A和$f[A]$的邻域V，存在着使$f[W]\subseteq V$的A的邻域W。

(e) 对于收敛于X上的模糊集A的X上的任意的模糊集合列$\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$，Y上的模糊集合列$\{f[A_n], n=1, 2, \cdots\}$收敛于$f[A]$。

证明 (a)$\Longleftrightarrow$(b) 设B为Y上模糊集，因为$f^{-1}[\bar{B}]=\overline{f^{-1}[B]}$总成立，所以(a)$\Longleftrightarrow$(b)是显然的。

(a)$\Rightarrow$(c) 设f为F-连续，A为X上的模糊集，V为$f[A]$的任意的邻域。那么，V包含着$f[A]$的开邻域W。因而，$f[A]\subseteq W\subseteq V$。根据定理3.1的(c)，则$f^{-1}[f[A]]\subseteq f^{-1}[W]\subseteq f^{-1}[V]$。但是，由于$A\subseteq f^{-1}[f[A]]$和$f^{-1}[W]$为开模糊集，所以$f^{-1}[V]$成为$A$的邻域。

(c)$\Rightarrow$(d) 如上所述，由于$f^{-1}[V]$是A的邻域，所以得$f[W]=f[f^{-1}[V]]\subseteq V$。这里的$W=f^{-1}[V]$。

(d)$\Rightarrow$(c) 设V为$f[A]$的邻域，则存在使$f[W]\subseteq V$的A的邻域W。由于$f^{-1}[f[W]]\subseteq f^{-1}[V]$以及$W\subseteq f^{-1}[f[W]]$，所以$f^{-1}[V]$为$A$的邻域。

(d)$\Rightarrow$(e) 设V为$f[A]$的邻域，则存在使$f[W]\subseteq V$的A的邻域W。而$\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$终究包含于W。即，存在着对于$n\geqslant m$且使$A_n\subseteq W$的m。因此，对于$n\geqslant m$，则$f[A_n]\subseteq f[W]$。所以，$\{f[A_n], n=1, 2, \cdots\}$收敛于$A$。

对于两个模糊拓扑空间X，Y，设$f:X\rightarrow Y$为一对一的并且是到Y上的映射（即全单射）。如果f及f^{-1}同时是F-连续的，则称f为**模糊拓扑映射**，这时，称X与Y为**F-同胚**。但是，因为“是F-同胚的”这种关系是等价关系，所以，属于相同的等价类的模糊拓扑空间，相互间是**拓扑地F-等价**的。

§4. 紧模糊空间

定义 4.1 所谓模糊集族 $\mathfrak{A}$ 是模糊集 B 的**覆盖**，或者 $\mathfrak{A}$ **覆盖着** B 是指：

$$B \subseteq \cup\{A \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

又，所谓 $\mathfrak{A}$ 是**开覆盖**，是指 $\mathfrak{A}$ 的元是开模糊集．B 的覆盖 $\mathfrak{A}$ 的子集族覆盖着 B 时，则称该子集族为 $\mathfrak{A}$ 的**子覆盖**．特别是，当该子集族由有限个元构成时，则称为**有限子覆盖**．

运用这些概念，模糊拓扑空间的紧性可以如下定义．

定义 4.2 所谓模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 是**紧的**，是指 X 的任意的开覆盖，都具有有限子覆盖．即，必定能够从 X 的任意的开覆盖 $\{A_\alpha\}$ 中，取出有限个 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \cdots, A_{\alpha_m}$，使它还是 X 的覆盖．详细地说，就是当 X 为若干个开模糊集的并集时，且可表示为

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad (A_\alpha \in \mathfrak{T})$$

则必定能够从 $\{A_\alpha\}$ 中适当地取出 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \cdots, A_{\alpha_m}$，而使

$$X = A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \cdots \cup A_{\alpha_m}$$

定义 4.3 在模糊集族 $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}$ 中，如果从其中任意取出有限个 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \cdots, A_{\alpha_n}$，其交集都决不是空的，即

$$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \cdots \cap A_{\alpha_n} \neq \phi$$

则称 $\mathfrak{A}$ 具有**有限交性**．

定理 4.1 模糊拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 为紧性的充分必要条件：是具有有限交性的任意的闭模糊集族 $\{A_\alpha\}$ 具有非空的交集，即

$$\bigcap A_\alpha \neq \phi$$

证明 （$\Longrightarrow$）设X为紧性的． 假定有某个具有有限交性的闭模糊集族 $\{A_\alpha\}$，并且 $\bigcap A_\alpha = \phi$．这样，根据德·莫尔甘定律，则 $\bigcup \overline{A}_\alpha = X$，模糊集族 $\{\overline{A}_\alpha\}$ 就成为X的开覆盖．因为X是紧性的，所以有限子族 $\overline{A}_{\alpha_1}, \overline{A}_{\alpha_2}, \cdots, \overline{A}_{\alpha_m}$ 覆盖着X。因为

$$X = \overline{A}_{\alpha_1} \cup \overline{A}_{\alpha_2} \cup \cdots \cup \overline{A}_{\alpha_m}$$

$$= \overline{\bigcap_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}} = \overline{\phi}$$

则 $\bigcap_{i=1}^{m} A_{\alpha_i} = \phi$，而与 $\{A_\alpha\}$ 的有限交性相矛盾．

（$\Longleftarrow$） 反之，设 $\{B_\alpha\}$ 为X的开覆盖．如果X不是紧性的，则 $\{B_\alpha\}$ 的任何有限子族也不能覆盖 X。运用德·莫尔甘定律，则得闭模糊集族 $\{\overline{B}_x\}$ 具有有限交性． 因此，$\bigcap_\alpha \overline{B}_\alpha \neq \phi$，由此 $X \neq \bigcup_\alpha B_\alpha$，而与 $\{B_\alpha\}$ 为X的覆盖相矛盾．

定理 4.2 设X为紧的模糊拓扑空间，f为从X到模糊拓扑空间Y的F-连续函数，则 $f[X]$ 也是紧的．

证明 若设 $f[X]$ 的开覆盖为 $\{B_\alpha\}$， 即若 $f[X] \subseteq \bigcap_\alpha B_\alpha$（$B_\alpha$ 为Y上的开模糊集），则

$$X = \bigcup_\alpha f^{-1}[B_\alpha]$$

因为f是 F-连续的，所以 $f^{-1}[B_\alpha]$ 是X上的开模糊集．但是，因为X是紧的，所以，用 $\{f^{-1}[B_\alpha]\}$ 中的适当的有限个元，可使

$$X = f^{-1}[B_{\alpha_1}] \cup \cdots \cup f^{-1}[B_{\alpha_m}]$$

成立. 一般地,因为 $f[f^{-1}[B]]\subseteq B$, 所以

$$f[x]\subseteq B_{\alpha_1}\cup\cdots\cup B_{\alpha_m}$$

故而 $f[X]$ 是紧的.

上面介绍了模糊拓扑空间的基本知识. 利用这些结果, 一般拓扑空间中的各种概念, 在模糊拓扑空间也能够运用.

第七章　模 糊 矩 阵

我们在这一章叙述有关模糊矩阵的性质．模糊矩阵的理论在回路理论、图论、网络理论、自动机理论以及后面将要说明的模糊系统理论中起着重要的作用．可以把模糊矩阵作为布尔矩阵的推广来论述．这里省略了关于布尔矩阵的详细内容，不过容易证明，在模糊矩阵中成立的事实在大多数情况下在布尔矩阵中也成立．

§1. 模 糊 矩 阵

设 $X \times Y$ 中的模糊关系为 R，而且是用隶属函数 $\mu_R(x, y)$，$x \in X$，$y \in Y$ 表示其特征的．如果设 X，Y 分别为有限集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，则 $X \times Y$ 中模糊关系 R 能用如下的 $m \times n$ 矩阵表示(图 1)．

$$\begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1), & \mu_R(x_1, y_2), \cdots, & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1), & \mu_R(x_2, y_2), \cdots, & \mu_R(x_2, y_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mu_R(x_m, y_1), & \mu_R(x_m, y_2), \cdots, & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

图 1　模糊关系的矩阵表示

显然，若设 R 为 $X \times X$ 上的，即 X 上的模糊关系，而 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则模糊关系 R 能用方阵表示．

这种表示模糊关系的矩阵称为**模糊矩阵**．由于隶属函数 μ_R 取 [0, 1] 中的值，所以，模糊矩阵的分量也取 [0, 1] 中的值．

1	0.7	0	0.7	0.5	0.6	0
0.7	1	0	0.9	0.4	0.5	0
0	0	1	0	0	0	0.1
0.7	0.9	0	1	0.4	0.5	0
0.5	0.4	0	0.4	1	0.4	0
0.6	0.5	0	0.5	0.4	1	0
0	0	0.1	0	0	0	1

图 2　模糊关系“相似”的模糊矩阵表示

例　举一个模糊矩阵的例子.

图 2 是用模糊矩阵表示的{苹果,球,···,四棱锥} 7 个对象的“相似”关系. 若相似的程度高,则对应近于 1 的值,若相似的程度低,则对应近于 0 的值. 比如,它说明“苹果”和“球”的相似程度为 0.7.

在模糊矩阵中,当分量只由 0，1 组成时，模糊矩阵就成了布尔矩阵(图 3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

图 3　布尔矩阵的例子

§2. 模糊矩阵的运算

在上一节,用模糊矩阵表示了模糊关系. 现在,以模糊关

系的运算为基础，叙述模糊矩阵的运算．这里只讨论模糊方阵的有关问题．

用大写字母 A，B，$\cdots$等表示矩阵． $n\times n$ 模糊方阵的分量，用一个字母 a 加上二重足码来表示是方便的．如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

即 A 的 (i,j) 分量用 a_{ij} 表示． 当 A 的 (i,j) 分量用 a_{ij} 表示时，略记为 $A=[a_{ij}]$．这里，$0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，$1\leqslant i,j\leqslant n$．

下面叙述模糊矩阵的运算：

(1) **相等**：在两个模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 中，若总有

$$a_{ij}=b_{ij}$$

则称 A 与 B **相等**，写成

$$A=B$$

(2) **包含**：在模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 中，若总有

$$a_{ij}\leqslant b_{ij}$$

则称 B **包含** A，或称 A **含于** B，写成

$$A\leqslant B$$

例 1

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

(3) **和**：设有两个模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，则以

$$c_{ij}=\max[a_{ij},b_{ij}]=a_{ij}\vee b_{ij}$$

为分量的模糊矩阵 C 称为 A 与 B 的**和**，表示为

$$C = A \oplus B$$

(4) **直积**：对于模糊矩阵 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$，以

$$c_{ij} = \min[a_{ij}, b_{ij}] = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

为分量的模糊矩阵 C 称为 A 与 B 的**直积**，表示为

$$C = A \otimes B$$

例 2 举一个模糊矩阵的和与直积的例子.

设

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

则和为

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \vee 0.8 & 0.3 \vee 0.5 \\ 0.4 \vee 0.3 & 0.8 \vee 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

而直积为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \wedge 0.8 & 0.3 \wedge 0.5 \\ 0.4 \wedge 0.3 & 0.8 \wedge 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

容易证明，关于模糊矩阵的和、直积，下面的关系成立.

$$A \oplus A = A, \quad A \otimes A = A$$

$$A \oplus B = B \oplus A, \quad A \otimes B = B \otimes A$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C, \quad A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$A \oplus (A \otimes B) = A, \quad A \otimes (A \oplus B) = A$$

$$A \oplus (B \otimes C) = (A \oplus B) \otimes (A \oplus C)$$

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

模糊矩阵的和、直积分别对应于模糊关系的并、交. 下面叙述的余模糊矩阵对应于余模糊关系.

（5）**余模糊矩阵**：对于模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$，以

$$1-a_{ij}$$

为分量的模糊矩阵，称为 A 的**余模糊矩阵**，写成

$$\overline{A}=[1-a_{ij}]$$

例3 设

$$A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\0.8 & 0.5\end{bmatrix}$$

则

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1-0.4 & 1-0.3\\1-0.8 & 1-0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\0.2 & 0.5\end{bmatrix}$$

（6）**矩阵积**：对于模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，如下定义 A 和 B 的**矩阵积** C

$$C=A\circ B\Longleftrightarrow c_{ij}=\max_k\min[a_{ik},b_{kj}]$$

$$=\bigvee_k[a_{ik}\wedge b_{kj}]$$

模糊矩阵的矩阵积对应于模糊关系的结合。

若用 2×2 模糊矩阵来说明矩阵积，就像下面这样．若设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

则

$$A\circ B=\begin{bmatrix}(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21}), & (a_{11}\wedge b_{12})\vee(a_{12}\wedge b_{22})\\(a_{21}\wedge b_{11})\vee(a_{22}\wedge b_{21}), & (a_{21}\wedge b_{12})\vee(a_{22}\wedge b_{22})\end{bmatrix}$$

例4 设

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\0.5 & 0.3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\0.6 & 0.9\end{bmatrix}$$

则

$$A\circ B=\begin{bmatrix}(0.8\wedge 0.2)\vee(0.7\wedge 0.6), & (0.8\wedge 0.4)\vee(0.7\wedge 0.9)\\(0.5\wedge 0.2)\vee(0.3\wedge 0.6), & (0.5\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.9)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

同样地，

$$B \circ A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

由此可知，一般来说 $A \circ B \neq B \circ A$. 在特殊情况下当 $A \circ B = B \circ A$ 时，称 A 与 B 可换.

对于模糊矩阵 A，如下归纳地定义它的**幂**.

$$A^2 = A \circ A,\ A^3 = A^2 \circ A, \cdots,\ A^k = A^{k-1} \circ A, \cdots$$

关于幂，与普通的数的情形一样，下面的指数法则成立.

$$A^k \circ A^l = A^{k+l}, \qquad (A^k)^l = A^{kl}$$

又，若 A, B **可换**，则

$$(A \circ B)^k = A^k \circ B^k$$

也成立.

关于矩阵积 ∘，和⊕以及直积⊗，下面关系成立.

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

$$A \circ (B \oplus C) = (A \circ B) \oplus (A \circ C)$$

$$A \circ (B \otimes C) \leqslant (A \circ B) \otimes (A \circ C)$$

(7) **转置模糊矩阵**: 把模糊矩阵 $A = [a_{ij}]$ 中的行与列交换所得到的模糊矩阵称为 A 的**转置模糊矩阵**. 用

$$A^T$$

表示.

例 5 若设

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

下面定义最基本的模糊矩阵 I，O，E.

(8) **单位模糊矩阵**：对角线上各项全是1，其它各项全是0的模糊矩阵称为**单位模糊矩阵**，或只称为**单位矩阵**，用 I 表示. 例如

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(9) **零模糊矩阵**：全部分量都是0的模糊矩阵称为**零模糊矩阵**，或只称为**零矩阵**，用 O 表示. 例如

$$O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(10) **全称模糊矩阵**：全部分量都是1的模糊矩阵称为**全称模糊矩阵**，或只称为**全称矩阵**，用 E 表示. 例如

$$E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

§3. 模糊矩阵的基本公式

下面，我们列举由模糊矩阵的运算导出的基本公式. 因为这些基本公式的证明比较容易，所以将证明省略了.

模糊矩阵的这些基本公式在布尔矩阵中也成立. 但互补律在模糊矩阵中一般不成立，如(15)，而在布尔矩阵中成立. 由这一事实可知模糊矩阵在包含关系 $\leqslant$ 之下构成分配格，而布尔矩阵构成布尔格.

(1) 对于一切模糊矩阵 A，有 $O\leqslant A\leqslant E$

(2) $A\leqslant A$ (自反律)

(3) 若 $A \leqslant B$，$B \leqslant A$，则 $A = B$（反对称律）

(4) 若 $A \leqslant B$，$B \leqslant C$，则 $A \leqslant C$（传递律）

(5) $A \leqslant B \Longleftrightarrow A \oplus B = B \Longleftrightarrow A \otimes B = A$

(6) 若 $A \leqslant B$，$C \leqslant D$，则

$$A \oplus C \leqslant B \oplus D$$

$$A \otimes C \leqslant B \otimes D$$

(7) $\left.\begin{array}{l} A \oplus A = A \\ A \otimes A = A \end{array}\right\}$（幂等律）

(8) $\left.\begin{array}{l} A \oplus B = B \oplus A \\ A \otimes B = B \otimes A \end{array}\right\}$（交换律）

(9) $\left.\begin{array}{l} (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \\ (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \end{array}\right\}$（结合律）

(10) $\left.\begin{array}{l} A \oplus (A \otimes B) = A \\ A \otimes (A \oplus B) = A \end{array}\right\}$（吸收律）

(11) $\left.\begin{array}{l} A \oplus (B \otimes C) = (A \oplus B) \otimes (A \oplus C) \\ A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \end{array}\right\}$（分配律）

(12) $\bar{\bar{A}} = A$（对合律）

(13) $\left.\begin{array}{l} \overline{(A \oplus B)} = \bar{A} \otimes \bar{B} \\ \overline{(A \otimes B)} = \bar{A} \oplus \bar{B} \end{array}\right\}$（德·莫尔甘定律）

(14) $\left.\begin{array}{l} A \oplus E = E,\ A \otimes E = A \\ A \oplus O = A,\ A \otimes O = O \end{array}\right\}$（定常律）

(15) 一般地

$$\left.\begin{array}{l} A \oplus \bar{A} \neq E \\ A \otimes \bar{A} \neq O \end{array}\right\}\text{（互补律不成立）}$$

由于上述事实，模糊矩阵在包含关系$\leqslant$下，或者说（由(5)）在运算$\oplus$，$\otimes$之下构成分配格。这时最大元，最小元分别为 E，O。

因为在布尔矩阵中，互补律(15)成立，所以构成布尔格。

例如，设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

为布尔矩阵，则

$$A\oplus\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=E$$

同样地

$$A\otimes\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

可是，对于模糊矩阵，设

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}$$

则

$$A\oplus\bar{A}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.8 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.8 & 0.7\end{bmatrix}\neq E$$

$$A\otimes\bar{A}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.8 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.2 & 0.3\end{bmatrix}\neq O$$

可知互补律不成立。

其次，关于模糊矩阵的矩阵积“○”，可得下面的基本公式。另外，由(17)，(18)可知模糊矩阵关于运算“○”构成具有单位元 I 的**半群**，即群胚（monoid）。

在定义了二元运算“○”的集合 S 中，若(1)对于 $a,b\in S$，有 $a\circ b\in S$，(2)结合律 $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ 成立，则称 S 为**半群**。若再有(3)存在使 $a\circ e=e\circ a=a$ 成立的 e 时，则称 S 为**具有单位元的半群**或称为群胚。

(16) 一般地，$A\circ B\neq B\circ A$

(17) $A\circ(B\circ C)=(A\circ B)\circ C$

(18) $A\circ I=I\circ A=A$

(19) $A \circ O = O \circ A = O$

(20) $A^O = I$, $A^{m+1} = A^m \circ A$

(21) $A^m \circ A^n = A^{m+n}$

(22) $(A^m)^n = A^{mn}$

(23) $A \circ (B \oplus C) = (A \circ B) \oplus (A \circ C)$

$(A \oplus B) \circ C = (A \circ C) \oplus (B \circ C)$

(24) $A \circ (B \otimes C) \leqslant (A \circ B) \otimes (A \circ C)$

$(B \otimes C) \circ A \leqslant (B \circ A) \otimes (C \circ A)$

(25) 若 $A \leqslant B$，$C \leqslant D$，则

$A \circ C \leqslant B \circ D$

关于转置模糊矩阵有

(26) $(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$

$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

$(A \circ B)^T = B^T \circ A^T$

(27) $(A^T)^T = A$

(28) $\overline{(A^T)} = \overline{A}^T$

(29) 若 $A \leqslant B$，则 $A^T \leqslant B^T$

§4. 模糊矩阵的基本定理

以上节的模糊矩阵的基本公式为基础，现在叙述几个重要的基本定理．

首先，我们求下面模糊矩阵 A 的幂矩阵 A^2, A^3, $\cdots$.

例 1 若设

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.95 \\ 0.8 & 0.1 & 0.25 \end{bmatrix}$$

则

$$A^2 = A \circ A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = A^5 = A^6 = \cdots$$

像这个例子这样，当 $n \to \infty$ 时，A^n 趋于固定，这样的模糊矩阵 A 称为**各态历经的**模糊矩阵。

再看下面的例子

例 2

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.0 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^3, \quad A^6 = A^4,$$

等等。在这个例子中

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

相互交替，周期为 2.

例 3

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad A^6 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$A^7=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7 & 0.7\\0.7 & 0.6 & 0.6\\0.6 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix},\quad A^8=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7 & 0.6\\0.6 & 0.6 & 0.7\\0.7 & 0.6 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$A^9=A^6,\quad A^{10}=A^7,\quad A^{11}=A^8$$

等等.

可知,在这个例子中周期为3. 根据这些例子可以说,各态历经的模糊矩阵(例1)的周期为1.

在上述三个例子中,模糊矩阵A的幂矩阵序列A, A^2, $A^3,\cdots,A^n$ 全都形成周期(周期为1也含在内),对任意的模糊矩阵是否也形成周期呢? 请看下面的定理.

定理1 对于任意的模糊矩阵,序列

$$A,A^2,\cdots,A^n,\cdots$$

总能形成周期(周期为1也含在内).

证明 设A为$m\times m$模糊矩阵,而$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$为A的分量的集合. 这时,由A的幂乘所得的不同的幂矩阵的个数至多为l^{m^2},即有限. 这就说明,在A若干次相乘之中,必然出现相同的矩阵,即形成周期. 证毕.

试求下面对角线上全为1的3×3模糊矩阵A(即$A\geqslant I$)的幂矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0.8\\0.5 & 1 & 0.4\\0.2 & 0.3 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0.8\\0.5 & 1 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 1\end{bmatrix}=A^3=A^4=\cdots$$

从这个例子看出,A^2以后全相同. 详细说就是

$$I\leqslant A\leqslant A^2=A^3=\cdots$$

可是，一般地当 $n\times n$ 模糊矩阵 $A\geqslant I$ 时将如何呢？

定理 2 对于 $n\times n$ 模糊矩阵 $A(\geqslant I)$

$$I\leqslant A\leqslant\cdots\leqslant A^{n-1}=A^n=A^{n+1}=\cdots \tag{1}$$

成立。

证明 用 $[a_{ij}]$ 表示 $n\times n$ 模糊矩阵 A，$1\leqslant i,\ j\leqslant n$，由于 $I\leqslant A$，所以，根据 §3. 公式 (25) 显然有 $A^{k-1}\leqslant A^k$，即

$$I\leqslant A\leqslant\cdots\leqslant A^{n-1}\leqslant A^n\leqslant\cdots \tag{2}$$

剩下只要证明 $A^{n-1}=A^n$ 就行了。因为 A^n 的对角线上各项全是 1 (因 为$A\geqslant I$)，所以，我们考虑非对角线上各项。对于 $i\neq j$，A^n 的 (i,j) 分量可表示为

$$\max_{1\leqslant k_1,\cdots,k_{n-1}\leqslant n}\min\ [a_{ik_1},a_{k_1k_2},\cdots,a_{k_{n-2}k_{n-1}},a_{k_{n-1}j}] \tag{3}$$

由于足码 $i,k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},j$ 有 $n+1$ 个，所以，当然其中至少有两个一样。这样，可以考虑下面三种情况 (a)，(b)，(c)。

(a) 对于某个 $s(1\leqslant s\leqslant n-1)$，若 $j=k_s$，则 (3) 式的项可如下书写。

$$\min[a_{ik_1},\cdots,a_{k_{s-1}j},a_{jk_{s+1}},\cdots,a_{k_{n-1}j}] \tag{4}$$

因为，一般来说 $\min[a,b]\leqslant a$，所以 (4) 含于 A^s 的 (i,j) 分量

$$\min[a_{ik_1},\cdots,a_{k_{s-1}j}] \tag{5}$$

中，其中 $1\leqslant s\leqslant n-1$，即 (4)≤(5)。

因此，根据 (2)，(4) 含于 A^{n-1} 的 (i,j) 分量中。

(b) 当 $i=k_s$ 时，也可与 (a) 一样的叙述。

(c) 设对于某两个 $s,r(s<r)$ 有 $k_s=k_r(\neq i,j)$，则 A^n 的 (i,j) 分量可写为

$$\min[a_{ik_1},\cdots,a_{k_{s-1}k_r},a_{k_rk_{s+1}},\cdots,a_{k_{r-1}k_r},\\ a_{k_rk_{r+1}},\cdots,a_{k_{n-1}j}] \tag{6}$$

显然它含于

$$\min[a_{ik_1}, \cdots, a_{k_{s-1}k_r}, a_{k_rk_{r+1}}, \cdots, a_{k_{n-1}j}] \tag{7}$$

中(参看图 4). 因而含于 A^{n-1} 的 (i, j) 分量中.

因此,由 (a), (b), (c) 可以记

$$A^n \leqslant A^{n-1}$$

根据 (2), 则得 $A^n = A^{n-1}$. 证毕.

模糊矩阵 A 的幂矩阵 $A, A^2, \cdots, A^m$ 的和表示为

$$\bigoplus_{i=1}^{m} A^i = A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m$$

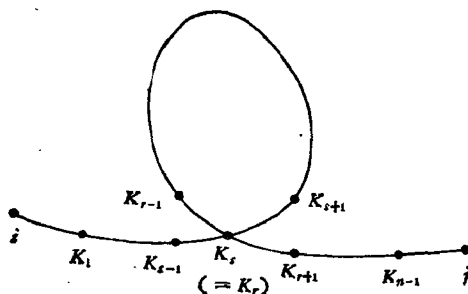


图 4

若设 $A(\geqslant I)$ 为 $n \times n$ 模糊矩阵,则由定理 2 得

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i = A^{n-1} \tag{8}$$

定理 3 设 A 为 $n \times n$ 模糊矩阵,则对各 $r \geqslant 0$ 有

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i = \bigoplus_{i=1}^{n+r} A^i \tag{9}$$

证明 就 $r = 1$ 的情况进行证明. 若 $r = 1$, 我们这样表示:

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} A^i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A^i\right) \oplus A^{n+1} \tag{10}$$

为了证明

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} A^i = \bigoplus_{i=1}^{n} A^i$$

只要证明(10)式中 A^{n+1} 的分量 $(A^{n+1})_{ij}$ 含于 $\bigoplus_{i=1}^{n} A^i$ 的 (i, j) 分量中就可以了. 现在，把 A^{n+1} 的分量 $(A^{n+1})_{ij}$ 表示如下:

$$\max_{1\leqslant k_1,\cdots,k_n\leqslant n} \min [a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \cdots, a_{k_{n-1}k_n}, a_{k_nj}]$$

用与定理2的证明同样的方法，可知 $(A^{n+1})_{ij}$ 含于某个 $A^r(r \leqslant n)$ 的 (i, j) 元素之中. 因此

$$A^{n+1} \leqslant \bigoplus_{i=1}^{n} A^i$$

成立.

用 A^* 表示模糊矩阵 A 的幂矩阵 A^i 的无限和，即

$$A^* = A^1 \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i$$

显然，由定理 2 可知，若 $A \geqslant I$，则 $A^* = A^{n-1}$.

定理 4 对于模糊矩阵 A, $B \geqslant I$，有

$$(A \oplus B)^* = (A^* \circ B^*)^* = (B^* \circ A^*)^* \tag{11}$$

证明 因为 $A^* \geqslant A$, $B^* \geqslant I$，所以 $A^* \circ B^* \geqslant A$. 同样有 $A^* \circ B^* \geqslant B$. 因此，$A^* \circ B^* \geqslant A \oplus B$，从而，

$$(A^* \circ B^*)^* \geqslant (A \oplus B)^* \tag{12}$$

又因为 $A \leqslant A \oplus B$，所以 $A^* \leqslant (A \oplus B)^*$，同样有 $B^* \leqslant (A \oplus B)^*$，因此，

$$A^* \circ B^* \leqslant ((A \oplus B)^*)^2 = (A \oplus B)^*$$

从而，

$$(A^* \circ B^*)^* \leqslant ((A \oplus B)^*)^* = (A \oplus B)^* \tag{13}$$

由(12)，(13)便得(11).

定义 1 设 $A = [a_{ij}]$ 为 $n \times n$ 模糊矩阵，对于 $k-1$ 个

足码 $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ 令

$$a = \min[a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}j}] \tag{14}$$

由一切这样的 a 组成的集合用 $A_{ij}^{(k)}$ 表示。

根据上面的定义，若设 A^k 的 (i, j) 分量为 $(A^k)_{ij}$，则它显然可表示为

$$\begin{aligned}(A^k)_{ij} &= \max_{i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}} \min\ [a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}j}] \\ &= \max_{a \in A_{ij}^{(k)}} a\end{aligned} \tag{15}$$

因此，

$$a \leqslant (A^k)_{ij} \tag{16}$$

成立。

引理 1 若设 A 是 $n \times n$ 模糊矩阵，$a \in A_{ij}^{(k)}$，其中 $k \geqslant n$，则存在满足下列 (i)，(ii)，(iii)，(iv) 的由 a 决定的整数 m_1, m_2, m_3, v。

(i) $0 < m_2 \leqslant n$

(ii) $m_1 + m_2 + m_3 = k$

(iii) $1 \leqslant v \leqslant n$

(iv) 对于每个 m 都有

$$a \leqslant \min[(A^{m_1})_{iv}, (A^{m \cdot m_2})_{vv}, (A^{m_3})_{vj}].$$

证明 设 $a = \min[a_{i_0i_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}i_k}]$，$i_0 = i$，$i_k = j$。由于 $k + 1 > n$，所以，在 $k + 1$ 个足码 $i_0, i_1, \cdots, i_k$ 中至少有两个是一样的。设 $i_r = i_s (r < s)$。再用 $i_r = i_s$ 能够找到满足 $r < s$，$s - r \leqslant n$ 的 r，s。然后令 $m_1 = r$，$m_2 = s - r$，$m_3 = k - s$，$v = i_r = i_s$ 由此，可以证得引理。图 5 中的虚线部分表示

$$\begin{aligned}a = \min[&a_{i_0i_1}, \cdots, a_{i_{r-1}i_s}, a_{i_si_{r+1}}, \cdots, a_{i_{s-1}i_s}, \\ &a_{i_si_{s+1}}, \cdots, a_{i_{k-1}i_k}] \\ = \min[&a_{ii_1}, \cdots, a_{i_{r-1}v}, a_{vi_{r+1}}, \cdots, a_{i_{s-1}v},\end{aligned}$$

$a_{vi_{s+1}}, \cdots, a_{i_{k-1}j}]$

另外,根据 (16) 显然

$$\min[a_{ii_1}, \cdots, a_{i_{r-1}v}] \leqslant (A^{m_1})_{iv}$$
$$\min[a_{vi_{r+1}}, \cdots, a_{i_{s-1}v}] \leqslant (A^{m_2})_{vv}$$
$$\min[a_{vi_{s+1}}, \cdots, a_{i_{k-1}j}] \leqslant (A^{m_3})_{vj}$$

成立. 因此导出

$$a \leqslant \min[(A^{m_1})_{iv}, (A^{m \cdot m_2})_{vv}, (A^{m_3})_{ij}]$$

证毕.

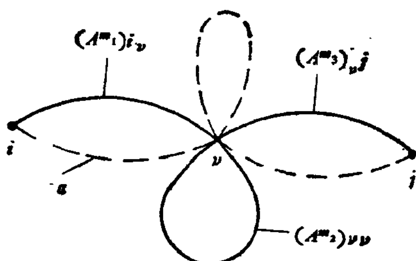


图 5　引理 1 的说明图

由引理 1 可得下面推论.

推论　若设 $a \in A_{ij}^{(k)}$, $k \geqslant n$, 则存在满足下列 (i), (ii), (iii), (iv) 的由 a 决定的整数 m_1, m_2, m_3, v.

(i) $m_1 + m_3 \leqslant n$

(ii) $0 < m_2 \leqslant n$

(iii) $1 \leqslant v \leqslant n$

(iv) 对于每个 m 都有

$$a \leqslant \min[(A^{m_1})_{iv}, (A^{m \cdot m_2})_{vv}, (A^{m_2})_{vj}]$$

定理 5　若设 $k \geqslant n$, 则对无限多的 r, $A^k \leqslant A^r$ 成立. 特别是对于每个 p 有

$$A^k \leqslant A^{k+p\cdot m_2} \tag{17}$$

证明 若设 $a \in A_{ij}^{(k)}$, $k \geqslant n$, 则根据引理 1 存在着使 $0 < m_2 \leqslant n$, $m_1 + m_2 + m_3 = k$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$ 成立, 并对每个 m

$$a \leqslant \min[(A^{m_1})_{i\nu}, (A^{m\cdot m_2})_{\nu\nu}, (A^{m_3})_{\nu j}]$$

也成立的整数 m_1, m_2, m_3, ν. 因此, 得

$$a \leqslant (A^{m_1+m\cdot m_2+m_3})_{ij} = (A^{k+(m-1)\cdot m_2})_{ij}$$

可是, 由于 m 是任意的, 所以用 $p\cdot(n!/m_2)$ 代替 $m-1$ 便得定理. 这里 p 是任意的自然数.

定理 6 若设 $k \geqslant r$, 则

$$A^k \leqslant A^r \circ (I \oplus A)^{n-1}$$

成立.

证明 若设 $a \in A_{ij}^{(k)}$, $k \geqslant r$, 考虑下面两种情形.

1° $k \leqslant r + n - 1$, 根据 $\bigoplus_{i=p}^{q} A^i = A^p \circ (I \oplus A)^{q-p}$, 则得

$$A^k \leqslant \bigoplus_{i=r}^{k} A^i \leqslant \bigoplus_{i=r}^{r+n-1} A^i = A^r \circ (I \oplus A)^{n-1}$$

因而

$$A^k \leqslant A^r \circ (I \oplus A)^{n-1}$$

成立.

2° $k > r + n - 1$, 这时 $k \geqslant n$ 成立. 根据引理 1, 则存在着满足 $0 < m_2 \leqslant n$, $m_1 + m_2 + m_3 = k$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$

$$a \leqslant \min[(A^{m_1})_{i\nu}, (A^{m_3})_{\nu j}]$$
$$\leqslant (A^{m_1+m_3})_{ij} = (A^{k-m_2})_{ij}$$

的自然数 m_1, m_2, m_3, ν. 这里, 如果是 $k - m_2 \leqslant r + n - 1$, 则由于 $0 < m_2 \leqslant n$, 所以用与上述 1° 同样的方法定理得证. 如果不是这样, 则应用引理 1 直到对某个 $r \leqslant s \leqslant r + n - 1$ 有 $a \leqslant (A^s)_{ij}$ 为止, 由此定理得证.

在定理 6 中若设 $r=0$，则对于任意的 k 得

$$A^k \leqslant (I+A)^{n-1} \tag{18}$$

因此，$I, A, A^2, \cdots$的和(用 $\tilde{A}$ 表示)如下表示

$$\tilde{A} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = (I+A)^{n-1} \tag{19}$$

定理 7 若 $k \geqslant r$，则

$$A^k \leqslant A^k \circ \tilde{A} \leqslant A^r \circ \tilde{A} \tag{20}$$

证明 因为 $\tilde{A} \geqslant I$，所以可导出 $A^k \leqslant A^k \circ \tilde{A}$. 又根据定理 6，若 $k \geqslant r$，则 $A^k \leqslant A^r \circ (I \oplus A)^{n-1} = A^r \circ \tilde{A}$，所以得 $A^k \circ \tilde{A} \leqslant A^r \circ \tilde{A} \circ \tilde{A} = A^r \circ \tilde{A}$.

定理 8 对任意的 k 有

$$A^k \circ A^n \circ \tilde{A} = A^n \circ \tilde{A} \tag{21}$$

证明 根据定理 5，对每个 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 存在着满足 $k+n+i<q_i$，$A^{n+i-1} \leqslant A^{q_i}$ 的整数 q_i. 因此有

$$A^n \circ \tilde{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} A^{n+i-1} \leqslant \bigoplus_{i=1}^{n} A^{q_i}$$

$$= A^k \circ A^n \circ \bigoplus_{i=1}^{n} A^{q_i-n-k}$$

可是，根据定理 6，对于每个 i 有

$$A^{q_i-n-k} \leqslant \tilde{A}$$

所以

$$A^k \circ A^n \circ \bigoplus_{i=1}^{n} A^{q_i-n-k} \leqslant A^k \circ A^n \circ \tilde{A}$$

因而

$$A^n \circ \tilde{A} \leqslant A^k \circ A^n \circ \tilde{A}$$

反之我们证明 $A^k \circ A^n \circ \tilde{A} \leqslant A^n \circ \tilde{A}$. 因为 $A^k \leqslant \tilde{A}$，所以 $A^n \circ A^k \leqslant A^n \circ \tilde{A}$. 可是因为 $A^n \circ A^k = A^k \circ A^n$，所以 $A^k \circ A^n \leqslant A^n \circ \tilde{A}$. 从右边乘以 $\tilde{A}$，则得 $A^k \circ A^n \circ \tilde{A} \leqslant A^n \circ \tilde{A} \circ \tilde{A} = A^n \circ \tilde{A}$

因而证明了 $A^k \circ A^n \circ \tilde{A} = A^n \circ \tilde{A}$.

瓦尔沙勒（Warshall）算法

瓦尔沙勒曾给出了对 $n \times n$ 布尔矩阵 A 计算

$$A^{(n)} = A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n$$

的快速算法．通常进行计算时，计算时间与 n^3 成比例，而用这个算法时，计算时间与 n^2 成比例．

现在，我们以瓦尔沙勒算法为基础，对模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$ 给出计算 $A^{(n)}$ 的瓦尔沙勒算法的推广．

按下列程序求 $A^* = [a^*_{ij}]$.

0° 令 $A^* = A$

1° $k = 1$

2° $a^*_{ij} = a^*_{ij} \vee [a^*_{ik} \wedge a^*_{kj}]$[1)] (22)

3° $k = k+1$

4° 若 $k \leqslant n$，则进行 2°，若 $k > n$，则停止．

这样求得的 A^* 为 $A^* = A^{(n)}$.

例 设 $A = [a_{ij}]$ 为如下的 3×3 模糊矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(i) $k = 1$

因为 $A^* = A$, 所以 (22) 式成为

$$a^*_{ij} = a^*_{ij} \vee [a^*_{i1} \wedge a^*_{1j}]$$

比如

$$a^*_{11} = a^*_{11} \vee [a^*_{11} \wedge a^*_{11}]$$
$$= 0.3 \vee [0.3 \wedge 0.3] = 0.3$$
$$a^*_{12} = a^*_{12} \vee [a^*_{11} \wedge a^*_{12}]$$

1) 在布尔矩阵中 2° 是这样:
2° 对于一切使 $a^*_{ik} = 1$ 成立的 i 有 $a^*_{ij} = a^*_{ij} \vee a^*_{kj}$

$$= 0.4 \vee [0.3 \wedge 0.4] = 0.4$$

$$a_{13}^* = a_{13}^* \vee [a_{11}^* \wedge a_{13}^*]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

因此,当 $k = 1$ 时

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.9 & 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(ii) $k = 2$

(22) 式成为

$$a_{ij}^* = a_{ij}^* \vee [a_{i2}^* \wedge a_{2j}^*]$$

用 (i) 中所求的 A^* 求 a_{ij}^*. 这时

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.7 \\ 0.9 & 0.4 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(iii) $k = 3$

(22) 式成为

$$a_{ij}^* = a_{ij}^* \vee [a_{i3}^* \wedge a_{3j}^*]$$

用 (ii) 中所求的 A^*, 则得

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

可是

$$A^{(3)} = A \oplus A^2 \oplus A^3$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.7 & 0.7 & 0.7\\0.9 & 0.7 & 0.7\\0.8 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}$$

可知与(iii)中所求的 A^*一致。

模糊矩阵的行列式

下面简单说明模糊矩阵的行列式。

$n\times n$ 模糊矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的行列式用 $|A|$ 表示，定义如下。

$$|A|=\max_{s_1,s_2,\cdots,s_n}\min[a_{1s_1},\ a_{2s_2},\ \cdots,\ a_{ns_n}]$$

其中 $s_1,\ s_2,\cdots,\ s_n$ 是取 $1,2,\cdots,n$ 中各不相同的值。

例 若设 A 为模糊矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

则行列式

$$\begin{aligned}|A|=&(a_{11}\wedge a_{22}\wedge a_{33})\vee(a_{11}\wedge a_{23}\wedge a_{32})\\&\vee(a_{12}\wedge a_{21}\wedge a_{33})\vee(a_{12}\wedge a_{23}\wedge a_{31})\\&\vee(a_{13}\wedge a_{21}\wedge a_{32})\vee(a_{13}\wedge a_{22}\wedge a_{31})\end{aligned}$$

若用余因子表示则成为

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\vee a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\vee a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

关于两个模糊方阵 A，B 的矩阵积 $A\circ B$ 的列行式有

$$|A|\wedge|B|\leqslant|A\circ B|$$

若设模糊方阵的分量 a_{ij} 在 $|A|$ 中的余因子为 A_{ij} 时，则称模糊矩阵

$$\hat{A}=[A_{ij}]$$

为 A 的**余因子矩阵**。

若设 $A(\geqslant I)$ 为 $n\times n$ 模糊矩阵，则有

$$\hat{A}=A^{n-1}$$

例 若设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.4\\0.8 & 1 & 0.3\\0.6 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

则余因子矩阵

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.4\\0.8 & 1 & 0.4\\0.7 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

$\hat{A}=A^2$ 成立.

第八章 模糊逻辑

§1. 引　言

本章将介绍由马尔诺斯（Marinos）定义的模糊逻辑的各种性质. 首先介绍模糊逻辑的基本性质以及模糊逻辑函数的分析与综合，然后再介绍连续逻辑. 由于模糊逻辑可以看作为连续逻辑的特殊情形，因而讨论连续逻辑将会加深对模糊逻辑的理解.

未来的电子计算机与现在的(数字型的) 2 值的计算机相比,可以说它将要以连续的(模拟型的)为重点. 现在,关于信息处理,数字电子计算承担着主要的任务. 但是,对于人类很容易掌握的那种问题,例如,模式识别、自然语言的翻译、博奕或者定理的证明等归纳性的问题，有多大容量的电子计算机也是不顺手的.

电子计算机的元件是把神经原典型化的东西，大约在 20 年以前,人们还是认为神经原或者处于兴奋状态,或者处于抑制状态,即或为 1，或为 0. 以此为基础,马 · 库洛赤（McCulloch）及皮特斯（Pitts）提倡采取2值状态的元件模型. 因为用 2 值逻辑元件来构成回路较为简便，并且错误少，另一方面,随着研究 2 值函数的形式逻辑(布尔代数)的进展,促使了今天的数字电子计算的迅速发展.

但是，到最近才弄清楚神经原并不是能用 2 值的 1，0 来标准化的，而是能用脉冲与脉冲之间的连续的时间间隔来标准化的. 人类思维这种事物与其说是数字的，还不如说是模

拟的元素更好.

基于这一点，最近，杰曼（Zeeman）根据神经原状态取 0 与 1 之间连续值的假定，提出了模拟的大脑模型. 这个大脑模型，简单地说，就是把大脑皮质、接受器以及外界的对象用以模拟量规范化了的空间及其点来表现，并且是把这些空间用保持邻域系的连续映射连结起来的模拟信息处理的系统.

可以说这是把人类的认识系统粗略地抽象化了的拓扑模型. 另外，查德认识到，在人类的信息处理形式中，“不分明性”所处地位的重要性，他把那种模糊性作为进行数学处理的实际对象，提出了前面讲过的模糊集论.

由于这种情况，制作人工大脑模型的新的倾向，与其说是 2 值状态，不如说是，已经转向采用连续状态逻辑元件的方向了. 这件事暗示了在逻辑学中与其从通常的 2 值的特征函数出发，倒不如从具有连续值的特征函数出发.

可以认为，模糊逻辑就是指出这样方向的饶有兴趣的学科. 作为模糊逻辑的应用，例如模式识别、情报检索、神经原模型、自组系统、联想门电路、函数发生器、程序模拟、自动监控、质量控制等，这些将是今后的研究课题.

§2. 模 糊 逻 辑

在通常的（2 值的、多值的）逻辑中，给定的命题的值，可以依据确定性的方法或者随机性的方法，客观地来决定. 但是，在实际问题中，不能用客观的方法来讨论的命题，是很多的. 例如，“某种花是美丽的”这个命题的值在很大的程度上是具有主观性的. 不能够清楚地给出“是”或“否”，亦即不能够清楚地断定“真”或“伪”的情形是有的. 马尔诺斯由于运用了模糊集的概念，把研究主观地决定真（1）与伪（0）之间的

值(连续的或离散的)那种命题的模糊逻辑规范化了.

进入正题以前，先复习一下模糊集的有关问题. 请注意和以前的模糊集的定义和记法稍有不同之处.

设 X 为空间 $\Omega=\{i\}$ 上的模糊集，x 为表示模糊集特征的隶属函数. 值 $x_i\in[0,1]$ 表示对象物 i 的隶属等级.

关于模糊集的运算,设 X, Y, Z 为 Ω 上的模糊集，x, y, z 为它们的隶属函数,那么,对于所有的 $i\in\Omega$, 有

(i) **相等** $X=Y\Longleftrightarrow x_i=y_i$ (1)

(ii) **包含** $X\subseteq Y\Longleftrightarrow x_i\leqslant y_i$ (2)

(iii) **并集** $Z=X\cup Y\Longleftrightarrow z_i=\max[x_i, y_i]$ (3)

(iv) **交集** $Z=X\cap Y\Longleftrightarrow z_i=\min[x_i, y_i]$ (4)

(v) **补集** $Z=\overline{X}\Longleftrightarrow z_i=1-x_i$ (5)

我们使用这些定义，用与 2 值逻辑相同的方法来讨论模糊逻辑.

在布尔函数的情形下，其变数只取 1 或 0 的两个值，但是,在模糊逻辑函数的情形下,则可以取 [0,1] 区间的值. 今后，把模糊函数中的变数（对应于隶属度的）称之为**模糊变数.**

模糊变数之间的基本运算,可以按照模糊集运算的定义,并且作为布尔运算的扩充定义如下. 设 x, $y\in[0, 1]$ 为模糊变数,则

(i) **逻辑和** $x\vee y=\max(x, y)$[1] (6)

---

1) 可以写成如下的形式:

$$\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=x\sigma(x-y)+y\sigma(y-x)$$

$$\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)=x\sigma(y-x)+y\sigma(x-y)$$

其中的

$$\sigma(z)=\begin{cases}1, & z>0\\0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

(ii) **逻辑积** $x \cdot y$ (或 $x \wedge y$) $= \min(x, y)$ (7)

(iii) **否定** $\bar{x} = 1 - x$ (8)

把模糊逻辑中的逻辑和、逻辑积以及否定的逻辑运算，用图来表示，则如图 1，图 2，图 3 那样.

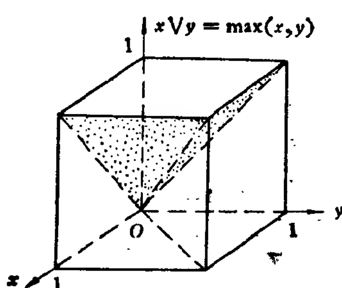


图 1 逻辑和 (max)

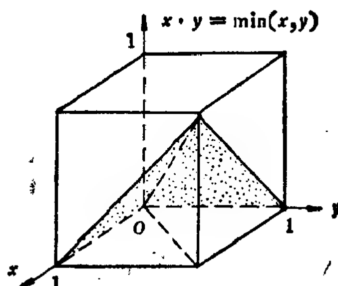


图 2 逻辑积 (min)

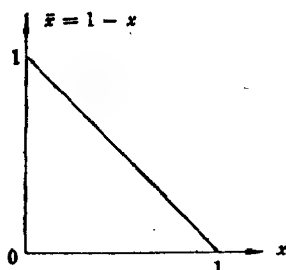


图 3 否定

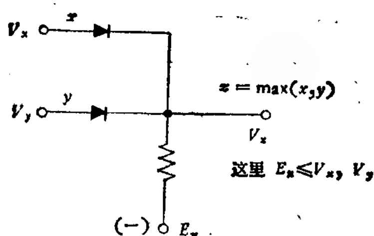


图 4 逻辑和 (max) 回路

并且，实现 max, min, 一的回路，和通常的 2 值逻辑情形下的 OR (或)、AND (与)、NOT (非)回路一样，可以用二极管、晶体三极管来简单地实现(图 4, 图 5, 图 6).

对模糊变数施行了前述那种逻辑操作的函数 (名之为**模糊函数**)，例如

$$f(x, y) = \bar{x} \cdot y \vee x \tag{9-1}$$

就是

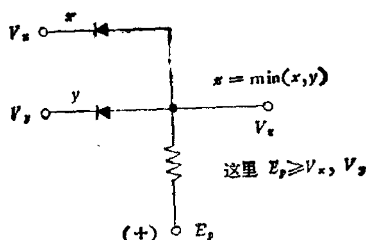
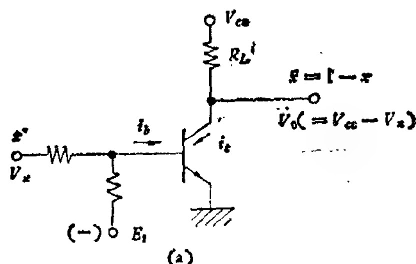
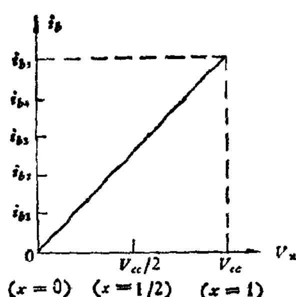
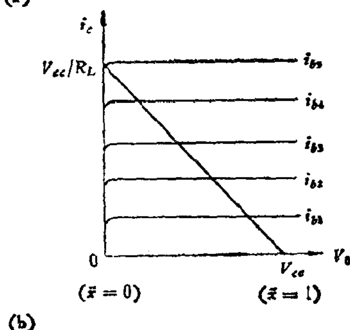


图5 逻辑积（min）回路



(a)





(b)

图6 否定(一)回路

$$f(x, y)=\max[\min(1-x, y), x] \qquad (9-2)$$

这表明在模糊集 X，Y 上等级分别为 x，y 的对象物，在新的模糊集 $Z=(\overline{X}\cap Y)\cup X$ 上的等级是 $f(x, y)$。

关于模糊函数，可导出如下的基本公式：

1. $\left.\begin{aligned}x \vee x = x\\ x \cdot x = x\end{aligned}\right\}$(幂等律) (10)

2. $\left.\begin{aligned}x \vee y = y \vee x\\ x \cdot y = y \cdot x\end{aligned}\right\}$(交换律) (11)

3. $\left.\begin{aligned}x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\end{aligned}\right\}$(结合律) (12)

4. $\left.\begin{aligned}x \vee (x \cdot y) = x\\ x \cdot (x \vee y) = x\end{aligned}\right\}$(吸收律) (13)

5. $\left.\begin{aligned}x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)\\ x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)\end{aligned}\right\}$(分配律) (14)

6. $(x \cdot y) \vee (y \cdot z) \vee (z \cdot x)$

$= (x \vee y) \cdot (y \vee z) \cdot (z \vee x)$ (15)

7. $\left.\begin{aligned}\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}\\ \overline{(x \cdot y)} = \bar{x} \vee \bar{y}\end{aligned}\right\}$(德·莫尔甘定律) (16)

8. $\left.\begin{aligned}1 \vee x = 1,\ 0 \vee x = x\\ 0 \cdot x = 0,\ 1 \cdot x = x\end{aligned}\right\}$(定常律) (17)

9. $\left.\begin{aligned}x \vee \bar{x} = \max(x, 1-x)\\ x \cdot \bar{x} = \min(x, 1-x)\end{aligned}\right\}$(互补律不成立) (18)

10. $\bar{\bar{x}} = x$(双重否定律) (19)

上述公式都是等式的，把不等式表出的公式汇集如下。

11. $x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x$ (20)

12. 若 $x_i \leqslant y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

且若 f 不包括否定符号"—"，

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

(模糊函数的单调性) (21)

13. $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \geqslant \bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$

(极小极大不等式) (22)

14. $x \vee y \vee z \geqslant (x \vee y) \cdot (y \vee z) \cdot (z \vee x) \geqslant x \cdot y \cdot z$

（中值不等式） (23)

15. 若 $x_1 \leqslant y_1$，$x_2 \leqslant y_2$，则

$$x_1 \vee x_2 \leqslant y_1 \vee y_2, x_1 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot y_2$$

16. 若 $x \leqslant y$，则

$$x \vee z \leqslant y \vee z$$

$$x \cdot z \leqslant y \cdot z$$

$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee z) \cdot y$$

$$\bar{y} \leqslant \bar{x}$$

$$x \vee y \vee z = y \vee z$$

等等。

17. 若 $x \leqslant y$ 或 $x \leqslant z$，则

$$x \leqslant y \vee z$$

$$x \leqslant y \cdot z$$

$$x \vee y \vee z = y \vee z$$

等等。

由于模糊变数可以取区间 [0，1] 的无限多个值，因而在研究模糊函数的时候(例如函数的化简等)，就不能象在通常的 2 值逻辑那样来使用图表(例如 Veitch 图表，Karnaugh 图表)等等。因而，就必须以解析的方法为主。

例如，试考虑如下的模糊函数。

$$f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee x(y \vee z)(y \vee \bar{x}) \quad (24)$$

根据上述模糊函数的定义和基本公式，则 $f(x, y, z)$ 可以表示成如下的简单形式：

$$f(x, y, z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee x\bar{x}z \quad (25)$$

或者

$$f(x, y, z) = x(\bar{y} \vee \bar{x}z) \vee y(x \vee \bar{x}\bar{z}) \quad (26)$$

另外，在 (25) 式中，$x\bar{x}z$ 在通常的 2 值逻辑中就成为 0 了，但

是，在模糊逻辑中就不一定是0． 这是因为 $x\bar{x} = \min(x, 1-x)$，$0 \leqslant x \leqslant 1$.

在前述的模糊函数中，如果模糊变数满足某种条件，则模糊函数还可以进一步化简. 例如，设 $x \geqslant z$，则(25)式变成下面的形式：

$$f(x, y, z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy \vee \bar{x}z \tag{27}$$

同样地，若 $\bar{x} \geqslant y$，则(25)式变为

$$f(x, y, z) = x \vee y\bar{z} \tag{28}$$

§3. 模糊函数的分析与综合

构造模糊函数的回路，像前节所讲的那样，能够简单地进行. 但是，在实际研究模糊函数及其回路的时候，将会发生困难. 因为模糊函数不具备像在2值(或多值)逻辑中那样"1或0"、"是或否"、"真或伪"的判定结构.

为了弥补这一点，在这一节，作为一种方法，接着把区间[0，1]分成如下的有限个"级"来进行模糊函数的分类：

$$\begin{aligned} &\text{第 1 级：} \quad a_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\text{第 2 级：} \quad a_2 \leqslant x < a_1 \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\text{第 } n \text{ 级：} \quad 0 \leqslant x < a_{n-1} \end{aligned} \tag{29}$$

其中，$1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > 0$.

我们来考虑 $n = 3$ 的情形，即设

$$\begin{aligned} &\text{第 1 级：} \quad a_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\text{第 2 级：} \quad a_2 \leqslant x < a_1 \\ &\text{第 3 级：} \quad 0 \leqslant x < a_2 \end{aligned} \tag{30}$$

的情形，可以给予各级以适当的意义.

例如，可以给予以下的意义. (a) 若 x 在"第1级"，则

属于集合中；(b) 若 x 在"第 3 级"，则不属于集合中；(c) 若 x 在"第 2 级"，则处于不分明的状态。

根据把区间 $[0, 1]$ 分成有限个级，可以运用多值逻辑的手段来研究模糊逻辑系统的各种问题。

在这一节，假定模糊函数(或者模糊变数)属于 n 个级之中的某一个，据此来研究模糊函数的分析与综合的问题。

在这里，先来说明最简单的情形，即 $n=2$ 及 $n=3$ 的情形。

(I) $n=2$ 的情形：可分为如下的两个级：

$$
\begin{aligned}
&\text{第 1 级：} \quad a_1 \leqslant x \leqslant 1 \\
&\text{第 2 级：} \quad 0 \leqslant x < a_1
\end{aligned}
\tag{31}
$$

在这里，虽然级的分类是 2 值的，可是，请注意 x 决不是 2 值变数。

现在，假定给出了如下的模糊函数：

$$
f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \tag{32}
$$

首先，来进行 $f(x, y, z)$ 的分析。当模糊函数 $f(x, y, z)$ 属于"第 1 级"的时候，即

$$
f(x, y, z) \geqslant a_1 \tag{33}
$$

的情形，模糊变数 x, y, z 要取怎样范围的值才可以呢？ 利用模糊函数的定义以及基本公式，就能够很简单地求出满足 (33) 式的 x, y, z 的范围。即，由 (32)，(33) 式则

$$
x\bar{y}z \geqslant a_1 \text{ 或 } \bar{x}\bar{y} \geqslant a_1 \text{ 或 } \bar{x}y\bar{z} \geqslant a_1
$$

进一步，例如是 $x\bar{y}z \geqslant a_1$ 的情形，则

$$
x \geqslant a_1 \text{ 并且 } \bar{y} \geqslant a_1 \text{ 并且 } z \geqslant a_1
$$

因为 $\bar{y} \geqslant a_1$ 可以改写为 $y \leqslant 1 - a$，所以上式则成为

$$
\left\{
\begin{array}{c}
x \geqslant a_1 \\
y \leqslant 1 - a_1 \\
z \geqslant a_1
\end{array}
\right\}
$$

另外的也同样地可求. 从而,满足(33)式的 x, y, z 则是

$$\left\{\begin{matrix} x \geqslant a_1 \\ y \leqslant 1 - a_1 \\ z \geqslant a_1 \end{matrix}\right\} \text{或者} \left\{\begin{matrix} x \leqslant 1 - a_1 \\ y \leqslant 1 - a_1 \end{matrix}\right\} \text{或者} \left\{\begin{matrix} x \leqslant 1 - a_1 \\ y \geqslant a_1 \\ z \leqslant 1 - a_1 \end{matrix}\right\} \tag{34}$$

反过来,我们试利用这个分析的方法来研究模糊函数的综合的问题.

例 1 作为简例,我们试求当模糊变数 x, y, z 满足下列条件时,即

$$\left\{\begin{matrix} x \geqslant a_1 \\ y \leqslant 1 - a_1 \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} x \geqslant a_1 \\ y \geqslant a_1 \\ z \leqslant 1 - a_1 \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} x \leqslant 1 - a_1 \\ y \leqslant 1 - a_1 \\ z \geqslant a_1 \end{matrix}\right\} \tag{35}$$

时,使 $f(x, y, z) \geqslant a_1$ 的模糊函数 $f(x, y, z)$.

解 从(34)式来类推,可简单的求得. 即

$$f(x, y, z) = x\bar{y} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \tag{36}$$

例 2 试找出当

$$\left\{\begin{matrix} x \geqslant a_1 \\ y \geqslant a_1 \\ (x \leqslant 1 - a_1 \text{ 或 } z \geqslant a_1) \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} x \geqslant a_1 \\ z \leqslant 1 - a_1 \end{matrix}\right\} \tag{37}$$

时,使 $f(x, y, z) \geqslant a_1$ 的模糊函数 $f(x, y, z)$.

解 用和例 1 同样的方法, 可以简单地求得 $f(x, y, z)$. 即

$$f(x, y, z) = xy(\bar{x} \vee z) \vee x\bar{z} \tag{38}$$

在这里,请注意 $x\bar{x}y$ 这一项只限于 $a_1 < 0.5$ 的时候,并且它比 a_1 还要大.

例 3 求当

$$\left\{\begin{matrix} x \geqslant b_1 \\ y \leqslant b_2 \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} x \leqslant b_3 \\ y \geqslant b_4 \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} x \geqslant b_5 \\ y \geqslant b_6 \\ z \leqslant b_7 \end{matrix}\right\} \tag{39}$$

时，使 $f(x, y, z) \geqslant a_1$ 成立的函数 $f(x, y, z)$.

解 例 1 和本例的本质的差异，就是所谓的 x, y, z 的范围与边界值 a_1 不一定有关系. 亦即 $b_1, b_2, \cdots, b_7$ 是区间[0, 1] 上的任意的值. 但是，请注意 $x \geqslant b_m$ 这种类型的不等式是与 a_1 有关系的，而 $x \leqslant b_n$ 这种情形是与 $(1-a_1)$ 对应着的. 从而，只要在 b_m, b_n 上乘以适当的数，使它们分别成为标准数 a_1, $1-a_1$ 就可以了. 以此求得的模糊函数如下:

$$f(x, y, z) = ((w_1x)\cdot(w_2\bar{y}) \vee ((w_3\bar{x})\cdot(w_4y)) \vee ((w_5x)\cdot(w_6y)\cdot(w_7\cdot\bar{z})) \tag{40}$$

其中，$w_1, w_2, \cdots, w_7$ 是对于各个模糊变数的乘法因子，是如下给定的:

$$\begin{array}{lll}
b_1w_1 = a_1 & \text{或} & w_1 = a_1/b_1 \\
b_2w_2 = 1-a_1 & \text{或} & w_2 = (1-a_1)/b_2 \\
b_3w_3 = 1-a_1 & \text{或} & w_3 = (1-a_1)/b_3 \\
b_4w_4 = a_1 & \text{或} & w_4 = a_1/b_4 \\
b_5w_5 = a_1 & \text{或} & w_5 = a_1/b_5 \\
b_6w_6 = a_1 & \text{或} & w_6 = a_1/b_6 \\
b_7w_7 = 1-a_1 & \text{或} & w_7 = (1-a_1)/b_7
\end{array}$$

图 7 是对应于以公式 (40) 给出的模糊函数的回路.

上面讲的模糊函数，是以"和积表现"的形式给出的，下面我们来考虑由"积和表现"的形式给出的模糊函数的分析与综合. 例如，关于

$$f(x, y, z) = (x \vee y)\cdot(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\cdot(\bar{x} \vee z) \tag{41}$$

这样的模糊函数，满足 $f(x, y, z) \geqslant a_1$ 的 x, y, z 如下:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geqslant a_1 \\ \text{或 } y \geqslant a_1 \end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 1-a_1 \\ \text{或 } y \geqslant a_1 \\ \text{或 } z \leqslant 1-a_1 \end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 1-a_1 \\ \text{或 } z \geqslant a_1 \end{array}\right\} \tag{42}$$

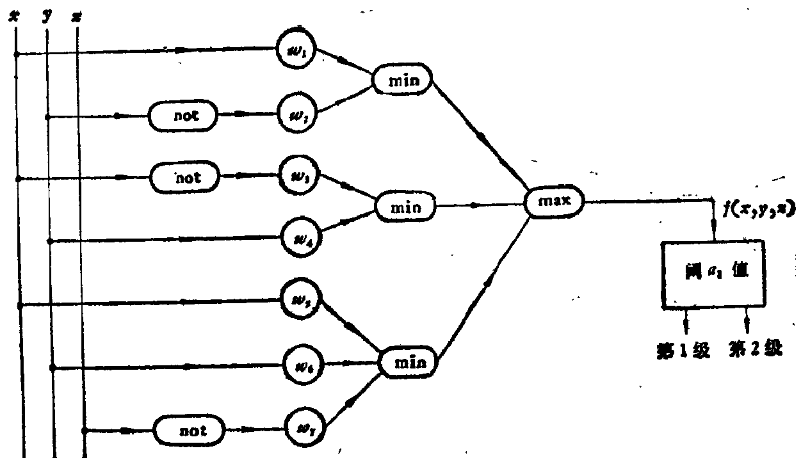


图 7 (40) 式的模糊逻辑回路

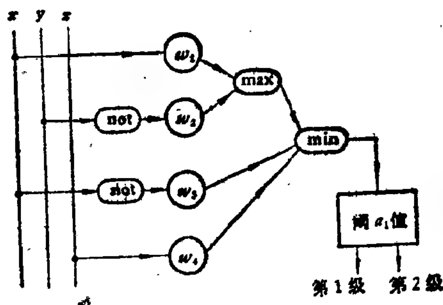


图 8 (44) 式的模糊逻辑回路

例 4 试求当

$$\left\{\begin{matrix} x \geqslant b_1 \\ \text{或 } y \leqslant b_2 \end{matrix}\right\} \text{并且 } \{x \leqslant b_3\} \text{ 并且 } \{z \geqslant b_4\} \tag{43}$$

时，使 $f(x, y, z) \geqslant a_1$ 成立的模糊函数 $f(x, y, z)$。

解 用和例 3 同样的方法即可求出，即

$$f(x, y, z) = (w_1 x \vee w_2 \bar{y}) \cdot (w_3 \bar{x}) \cdot (w_4 z) \tag{44}$$

其中，

$$w_1 = a_1/b_1, \qquad w_2 = (1 - a_1)/b_2,$$

$$w_3 = (1 - a_1)/b_3, \qquad w_4 = a_1/b_4$$

(44) 式的回路如图 8.

前面，为了进行模糊函数的分析与综合，是把区间 [0,1] 分为两个级来讨论的. 下面，我们要讲把区间 [0, 1] 分为三个级的有关模糊函数的分析与综合的问题.

(II) $n = 3$ 的情形：可以分为如下的三个级：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{第 1 级:} & a_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{第 2 级:} & a_2 \leqslant x < a_1 \\ \text{第 3 级:} & 0 \leqslant x < a_2 \end{array}\right\} \tag{45}$$

这里虽然级的分类是 3 值的，但是，请注意 x 决不是 3 值变数.

先讲模糊函数的分析.

例 1 现在，假设给定了如下的模糊函数：

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z} \tag{46}$$

首先，当模糊函数 $f(x, y, z)$ 属于"第 1 级"或者"第 3 级"的情形，可以用与前述的分析法相同的方法来讨论，因而这里就省略了. 这里我们要讲 $f(x, y, z)$ 属于"第 2 级"的情形，即

$$a_2 \leqslant f(x, y, z) < a_1 \tag{47}$$

的情形.

满足 (47) 式的模糊变数 x, y, z，要取怎样范围的值才可以呢?

首先，模糊函数 $f(x, y, z)$ 满足

$$a_2 \leqslant f(x, y, z) \tag{48}$$

时，即

$$a_2 \leqslant \bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z} \tag{49}$$

的情形，x，y，z 的范围可如下给出：

$$\left\{\begin{array}{r}\bar{x} \geqslant a_2 \\ \text{并且 } \bar{y} \geqslant a_2\end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{r}x \geqslant a_2 \\ \text{并且 } y \geqslant a_2 \\ \text{并且 } \bar{z} \geqslant a_2\end{array}\right\} \tag{50}$$

但是，$\bar{x} \geqslant a_2$ 可以改写为 $x \leqslant 1 - a_2$，所以改写为：

$$\left\{\begin{array}{r}x \leqslant 1 - a_2 \\ \text{并且 } y \leqslant 1 - a_2\end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{l}\quad\quad x \geqslant a_2 \\ \text{并且 } y \geqslant a_2 \\ \text{并且 } z \leqslant 1 - a_2\end{array}\right\} \tag{51}$$

用同样的方法，满足

$$f(x, y, z) < a_1 \tag{52}$$

即满足

$$\bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z} < a_1 \tag{53}$$

的 x，y，z，可由

$$\left\{\begin{array}{r}x > 1 - a_1 \\ \text{或 } y > 1 - a_1\end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{l}\quad x < a_1 \\ \text{或 } y < a_1 \\ \text{或 } z > 1 - a_1\end{array}\right\} \tag{54}$$

给出。

从而，使模糊函数 $f(x, y, z)$ 属于"第 2 级"，即使

$$a_2 \leqslant \bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z} < a_1$$

成立的 x，y，z，根据 (51) 及 (54) 则为：

$$\text{第 1 组} = \left[\left\{\begin{array}{r}x \leqslant 1 - a_2 \\ \text{并且 } y \leqslant 1 - a_2\end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{l}\quad\quad x \geqslant a_2 \\ \text{并且 } y \geqslant a_2 \\ \text{并且 } z \leqslant 1 - a_2\end{array}\right\}\right]$$

及 (55)

$$\text{第 2 组} = \left[\left\{\begin{array}{r}x > 1 - a_1 \\ \text{或 } y > 1 - a_1\end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{l}\quad x < a_1 \\ \text{或 } y < a_1 \\ \text{或 } z > 1 - a_1\end{array}\right\}\right]$$

这里应当注意的是第 1 组和第 2 组有对偶关系．即在第

1组，把 a_2 换为 a_1，"并且"换为"或"，"或"换为"并且"，并改变不等号(等号不必管)的向，则可得第2组. 还应当注意的是第1组中的"并且"以及"或"分别对应着模糊函数中的"逻辑积 (min)"以及"逻辑和 (max). 在第2组中"并且"以及"或"分别对偶地对应着"逻辑和"以及"逻辑积".

在现在这个例子中，模糊函数是按"和积表现"的形式给出的，在下面的例子中，我们来讲按"积和表现"的形式给出的模糊函数的分析.

例 2 假设按积和表现的形式，给定了如下的模糊函数:

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \tag{56}$$

与例1同样，当模糊函数 $f(x, y, z)$ 在第2级中，即当

$$a_2 \leqslant (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) < a_1$$

的情形，所求的 x, y, z 的范围，可如下给出:

$$\left.\begin{array}{l}\text{第 1 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x \geqslant a_2 \\ \text{或 } y \leqslant 1 - a_2 \end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{r} x \leqslant 1 - a_2 \\ \text{或 } y \geqslant a_2 \\ \text{或 } z \leqslant 1 - a_2 \end{array}\right\}\right] \\ \text{及} \\ \text{第 2 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x < a_1 \\ \text{并且 } y > 1 - a_1 \end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{r} x > 1 - a_1 \\ \text{并且 } y < a_1 \\ \text{并且 } z > 1 - a_1 \end{array}\right\}\right]\end{array}\right\} \tag{57}$$

在这里，第1组是表示满足 $a_2 \leqslant f(x, y, z)$ 的 (x, y, z) 的集合，第2组是表示满足 $f(x, y, z) < a_1$ 的 (x, y, z) 的集合. 这里也和例1同样，第1组和第2组有对偶关系.

下面，利用例1及例2中的模糊函数的分析方法，介绍有关模糊函数的综合问题.

首先，举个简单的例子.

例 3 当模糊变数 x, y, z 满足下面第1组及第2组中的条件时，试求使 $a_2 \leqslant f(x, y, z) < a_1$ 的模糊函数 $f(x, y, z)$:

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{第 1 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x \geqslant a_2 \\ \text{并且 } y \leqslant 1 - a_2 \\ \text{并且 } z \geqslant a_2 \end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{r} x \leqslant 1 - a_2 \\ \text{并且 } y \geqslant a_2 \end{array}\right\}\right] \\
\text{及} \\
\text{第 2 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x < a_1 \\ \text{或 } y > 1 - a_1 \\ \text{或 } z < a_1 \end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{r} x > 1 - a_1 \\ \text{或 } y < a_1 \end{array}\right\}\right]
\end{array}\right\} \quad (58)
$$

解 因为第 1 组及第 2 组与例 1 的 (55) 式非常相似，由此类推出满足 (58) 的 $f(x, y, z)$ 为

$$
f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}y \quad (59)
$$

下面给出略微复杂一点的例子，试求实现它的回路.

例 4 在给出

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{第 1 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x \geqslant b_1 \\ \text{并且 } y \leqslant b_2 \\ \text{并且 } z \geqslant b_3 \end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{r} x \leqslant b_4 \\ \text{并且 } y \geqslant b_5 \end{array}\right\}\right] \\
\text{及} \\
\text{第 2 组} = \left[\left\{\begin{array}{r} x < b_6 \\ \text{或 } y > b_7 \\ \text{或 } z < b_8 \end{array}\right\} \text{并且} \left\{\begin{array}{r} x > b_9 \\ \text{或 } y < b_{10} \end{array}\right\}\right]
\end{array}\right\} \quad (60)
$$

的情形下，试求满足 $a_2 \leqslant f(x, y, z) < a_1$ 的模糊函数. 其中，第 1 组是表示满足 $a_2 \leqslant f(x, y, z)$ 的 x, y, z 的条件，第 2 组是表示满足 $f(x, y, z) < a_1$ 的 x, y, z 的条件.

解 这个例子中的第 1 组及第 2 组，和前面例 3 的第 1 组及第 2 组的 (58) 式，非常相似. 所不同的地方仅仅是所谓的模糊变数 x, y, z 的范围与 a_2 及 a_1 没有关系. 即 $b_K(K = 1, 2, \cdots, 10)$ 是使 $0 \leqslant b_k \leqslant 1$ 的任意的值. 但是，请注意在第 1 组中，一般地，$x \geqslant b_m$ 这种类型不等式是对应于 a_2 的，而 $x \leqslant b_n$ 的情形是对应着 $(1 - a_2)$ 的. 并且在第 2 组中，

$x > b'_m$ 这种类型的不等式对应着 $(1-a_1)$，$x < b'_n$ 这种情形对应着 a_1。从而，对 b_m，b_n，b'_m，b'_n 分别乘以适当的常数（乘法因子），使它们成为标准数 a_2，$1-a_3$，$1-a_1$，a_1 就可以了。

对于第 1 组中的 x，y，z，使 $a_2 \leqslant f(x, y, z)$ 成立就可以，因而，对于第 1 组来说，所求的模糊函数就是

$$f(x, y, z) = ((w_1x)\cdot(w_2\bar{y})\cdot(w_3z))\vee((w_4\bar{x})\cdot(w_5y)) \qquad (61)$$

这里的乘法因子 w_1，w_2，$\cdots$，w_5，可分别如下给出。

第 1 组：

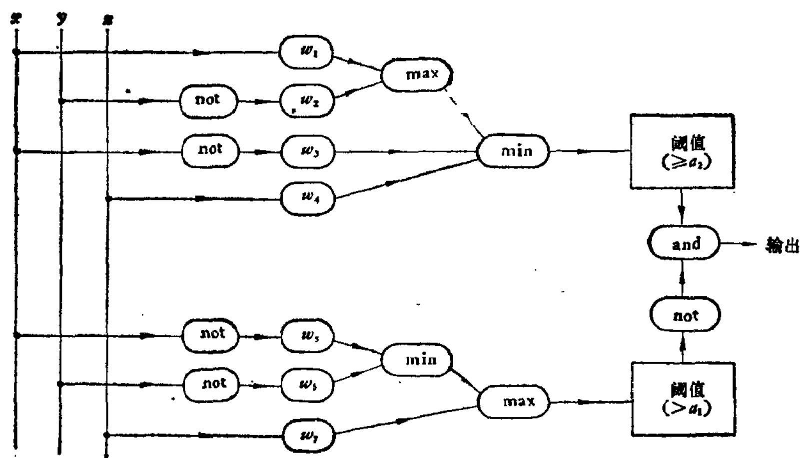


图 9　例 4 中的模糊逻辑回路

$$b_1w_1 = a_2 \qquad 或 \qquad w_1 = a_2/b_1$$

$$b_2w_2 = 1-a_2 \qquad 或 \qquad w_2 = (1-a_2)/b_2$$

$$b_3w_3 = a_2 \qquad 或 \qquad w_3 = a_2/b_3$$

$$b_4w_4 = 1-a_2 \qquad 或 \qquad w_4 = (1-a_2)/b_4$$

$$b_5 w_5 = a_2 \qquad 或 \quad w_5 = a_2 / b_5$$

同样地，对于第 2 组中的 x, y, z, 使 $f(x, y, z) < a_1$, 因而所求的模糊函数则为：

$$f(x, y, z) = ((w_6 x) \cdot (w_7 \bar{y}) \cdot (w_8 z)) \vee ((w_9 \bar{x}) \cdot (w_{10} y)) \quad (62)$$

这里的 $w_6, w_7, \cdots, w_{10}$ 是

第 2 组：

$$b_6 w_6 = a_1 \qquad 或 \quad w_6 = a_1 / b_6$$

$$b_7 w_7 = 1 - a_1 \qquad 或 \quad w_7 = (1 - a_1) / b_7$$

$$b_8 w_8 = a_1 \qquad 或 \quad w_8 = a_1 / b_8$$

$$b_9 w_9 = 1 - a_1 \qquad 或 \quad w_9 = (1 - a_1) / b_9$$

$$b_{10} w_{10} = a_1 \qquad 或 \quad w_{10} = a_1 / b_{10}$$

实现这样求得的模糊函数的回路如图 9. 从图可以明显地看出，仅限于 x, y, z 满足 $a_2 \leqslant f(x,y,z) < a_1$ 时，亦即满足于第 1 组和第 2 组的条件时，才有输出.

在上述例子中，第 1 组与第 2 组都是处于对偶关系的。但是，在例 4 中，满足第 1 组和第 2 组的函数是分别求出的。因此，这种方法在第 1 组和第 2 组没有对偶关系的情形下，也能够适用. 这件事可用下面的例子来说明.

例5 某一模糊逻辑回路 R, 它仅在 x,y,z 满足下面的第 1 组及第 2 组条件时，才有输出，试求使 $a_2 \leqslant R < a_1$ 成立的 R。这里，

$$\left.\begin{aligned} &第1组=\left[\left\{\begin{matrix} x \geqslant b_1 \\ 或\ y \leqslant b_2 \end{matrix}\right\} 并且\ \{x \leqslant b_3\}\ 并且\ \{z \geqslant b_4\}\right] \\ &及 \\ &第2组=\left[\left\{\begin{matrix} x \geqslant b_5 \\ 或\ y \geqslant b_6 \end{matrix}\right\} 并且\ \{z \leqslant b_7\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

解 因为第 1 组与第 2 组没有对偶关系，对于各个组，显

然对应着不同的模糊函数．设 $f_1(x,y,z)$ 及 $f_2(x,y,z)$ 分别为第 1 组及第 2 组上的模糊函数．这些函数 f_1，f_2，对于(63)的第 1 组及第 2 组必须分别使 $f_1 \geqslant a_2$，$f_2 \leqslant a_1$.

首先，根据第 1 组的条件，则 f_1 就成为

$$f_1(x,y,z) = ((w_1 x) \vee (w_2 \bar{y})) \cdot (w_3 \bar{x}) \cdot (w_4 z) \quad (64)$$

在这里，w_1，w_2，w_3，w_4 是：

第 1 组：

$$w_1 = a_2/b_1, \qquad w_2 = (1 - a_2)/b_2$$

$$w_3 = (1 - a_2)/b_3, \qquad w_4 = a_2/b_4$$

其次，根据第 2 组，则

$$f_2(x,y,z) = ((w_5 \bar{x}) \cdot (w_6 \bar{y})) \vee (w_7 z) \quad (65)$$

在这里，w_5，w_6，w_7 是

第 2 组：

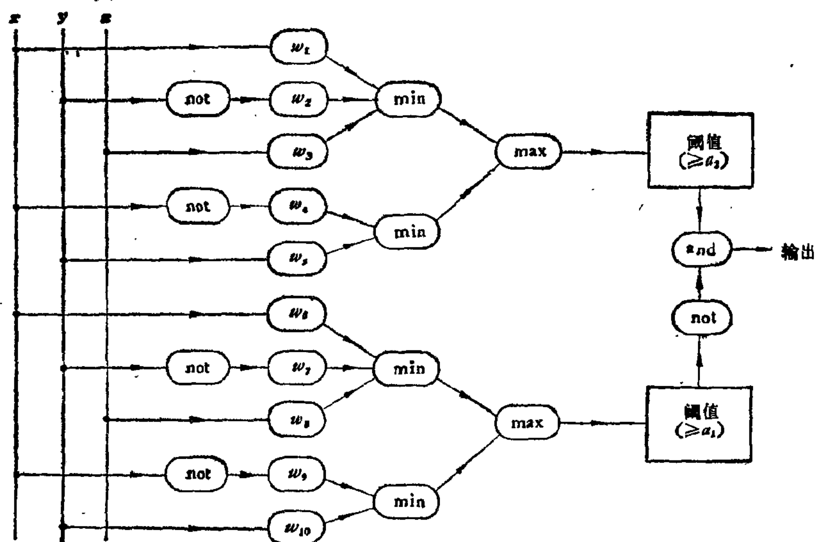


图 10　例 5 的模糊逻辑回路

$$w_5 = (1 - a_1)/b_5, \qquad w_6 = (1 - a_1)/b_6,$$
$$w_7 = a_1/b_7.$$

从而，关于例 5 的模糊逻辑回路如图 10.

上面是把区间 [0,1] 分为两个或三个级来讨论模糊函数的分析与综合问题的. 在更一般的情况下，即在把[0,1]分为有限个级的情况下，例如分为

$$\begin{aligned} &\text{第 1 级:} \quad a_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\text{第 2 级:} \quad a_2 \leqslant x < a_1 \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\text{第 } n \text{ 级:} \ 0 \leqslant x < a_{n-1} \end{aligned}$$

的情形，也能够用同样的方法来研究模糊函数的分析与综合的问题. 例如，模糊函数在"第 m 级"的情形，亦即 $a_m \leqslant f < a_{m-1}$ 的情形，对于上面讲的标准数 a_2, a_1，把 a_2 换为 a_m，a_1 换为 a_{m-1}，则可以用相同的方法来讨论.

§4. 模糊函数的标准型

这一节介绍不含有否定项($\bar{x}$ 等等)的模糊函数的加法标准型和乘法标准型. 本节若说模糊函数就是指不含有否定项的模糊函数. 对于含有否定项的，即通常的模糊函数，是找不到标准型的.

一般地，对于模糊函数，可以很容易地确认下列公式成立:

若 $x_i \leqslant y_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{66}$$

从而

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, 0, \cdots) &\leqslant f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \\ &\leqslant f(x_1, x_2, \cdots, 1, \cdots) \end{aligned} \tag{67}$$

成立。

引理 对于任意的一个变数的模糊函数 $f(x)$.

$$f(x)=(f(1)\cdot x)\vee(f(0)\cdot 1) \tag{68}$$

成立. 其中, $0\leqslant x\leqslant 1$[1].

证明 首先考虑最简单的模糊函数 $f(x)=x$, 那么(68)则成为

$$f(x)=(1\cdot x)\vee(0\cdot 1)=x$$

确实是成立的. 而对于 $f(x)=a$ (常数),则

$$f(x)=(a\cdot x)\vee(a\cdot 1)=a$$

(根据吸收律)

从而,对于这些简单的模糊函数,(68)式是成立的.

其次,设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为给定的使(68)式成立的两个函数. 那么,这两个模糊函数的和及积如下:

$$\begin{aligned}
&f_1(x)\vee f_2(x)\\
&=[(f_1(1)\cdot x)\vee(f_1(0)\cdot 1)]\vee[(f_2(1)\cdot x)\vee(f_2(0)\cdot 1)]\\
&=(f_1(1)\cdot x)\vee(f_2(1)\cdot x)\vee(f_1(0)\cdot 1)\vee(f_2(0),1)\\
&=[(f_1(1)\vee f_2(1))\cdot x]\vee[(f_1(0)\vee f_2(0))\cdot 1]\\
&f_1(x)\cdot f_2(x)\\
&=[(f_1(1)\cdot x)\vee(f_1(0)\cdot 1)]\cdot[(f_2(1)\cdot x)\vee(f_2(0)\cdot 1)]\\
&=(f_1(1)\vee f_1(0))\cdot(f_1(0)\vee x)\cdot(f_2(1)\vee f_2(0))\\
&\qquad\cdot(f_2(0)\vee x)
\end{aligned}$$

但是,因为一般地有 $f_1(0)\leqslant f_1(1)$, 所以

$$f_1(1)\vee f_1(0)=f_1(1),\ f_1(1)\cdot f_1(0)=f_1(0)$$

对于 $f_2(x)$ 也同样适用.

---

1) 在布尔函数(即使含有否定项也可以)的情形下,设 $f(x)$ 为1变数布尔函数,则

$$f(x)=(f(1)\cdot x)\vee(f(0)\cdot \bar{x})$$

其中, $x\in\{0,1\}$

从而，

$$
\begin{aligned}
& f_1(x) \cdot f_2(x) \\
&= f_1(1) \cdot (f_1(0) \vee x) \cdot f_2(1) \cdot (f_2(0) \vee x) \\
&= f_1(1) \cdot f_2(1) \cdot [x \vee (f_1(0) \cdot f_2(0))] \\
&= [(f_1(1) \cdot f_2(1) \cdot x] \vee [f_1(1) \cdot f_1(0) \cdot f_2(1) \cdot f_2(0)] \\
&= [(f_1(1) \cdot f_2(1)) \cdot x] \vee [f_1(0) \cdot f_2(0) \cdot 1]
\end{aligned}
$$

因而，如果对 $f_1(x)$，$f_2(x)$ (68) 式为真，则对于它们的和及积也为真。但是，任意的 1 变数模糊函数，都可以由对 x 逐次实施"$\vee$"及"$\cdot$"而构造出来。从而，所有的 1 变数模糊函数，都可以写成(68)式的形式来表示它。

同样，2 变数模糊函数 $f(x_1, x_2)$可以用

$$f(x_1, x_2) = [f(1, x_2) \cdot x_1] \vee [f(0, x_2) \cdot 1]$$

来表示。进而一般地对于 n 变数模糊函数，有

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= [f(1, x_2, \cdots, x_n) \cdot x_1] \vee [f(0, x_2, \cdots, x_n) \cdot 1]^{1)} \quad (69)
\end{aligned}
$$

但是，若对 x_2 应用这个法则 (69) 则有

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= [f(1, 1, x_3, \cdots, x_n) \cdot x_1 \cdot x_2] \\
&\quad \vee [f(1, 0, x_3, \cdots, x_n) \cdot x_1 \cdot 1] \\
&\quad \vee [f(0, 1, x_3, \cdots, x_n) 1 \cdot x_2] \\
&\quad \vee [f(0, 0, x_3, \cdots, x_n) 1 \cdot 1]
\end{aligned}
$$

进而顺次把这一法则应用于 x_3，x_4，$\cdots$，x_n，一般地，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就可以表为如下形式。这个形式就称为**加法标准型**.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

---

1) 对于布尔函数，则有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [f(1, x_2, \cdots, x_n) \cdot x_1] \vee [f(0, x_2, \cdots, x_n) \cdot \bar{x}_1]$$

$$
\begin{aligned}
= & [f(1,1,\cdots,1)\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n] \\
& \vee[f(1,1,\cdots,1,0)\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}\cdot 1] \\
& \vee[f(1,1,\cdots,0,1)\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot 1\cdot x_n] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \vee[f(0,0,1,\cdots,0)\cdot 1\cdot 1\cdot x_3\cdot\cdots\cdot 1] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \vee[f(0,0,\cdots,0)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1]
\end{aligned}
\quad (70)
$$

若想简单地表示上面的公式，则可以整理为如下的形式

加法标准型

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigvee_{e}(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot x_1^{e_1}\cdot x_2^{e_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{e_n} \quad (71)
$$

其中，

$$
x_i^{e_i}=\begin{cases} x_i, & e_i=1 \\ 1, & e_i=0 \end{cases}
$$
[1]

上面给出了不含有否定项的模糊函数的加法标准型。对偶地，乘法标准型可以像下面那样给出。

首先，把(69)式改写一下，就变成为如下的形式：

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = [f(0,x_2,\cdots,x_n)\vee x_1]\cdot[f(1,x_2,\cdots,x_n)\vee 0] \quad (72)
$$
[2]

那么，与加法标准型的情形一样，把 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 顺次地应用于(72)式，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以表示成如下的形

1) 布尔函数的情形，则为

$$
x_i^{e_i}=\begin{cases} x_i, & e_i=1 \\ \bar{x}_i, & e_i=0 \end{cases}
$$

2) (72)式右边，第2项的0虽然是不必要的，但是，还是那样形式地写上它。在布尔函数的情形下，则为

$$
f(x_1,x_1,\cdots,x_n)=[f(0,x_2,\cdots,x_n)\vee x_1]\cdot[f(1,x_2,\cdots,x_n)\vee\bar{x}_1]
$$

式. 这个形式称为**乘法标准型**.

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= & [f(1, 1, \cdots, 1) \vee 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0] \cdot \\
& \cdot [f(1, 1, \cdots, 1, 0) \vee 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 \vee x_n] \\
& \cdot [f(1, 1, \cdots, 0, 1) \vee 0 \vee 0 \vee \cdots \vee x_{n-1} \vee 0] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdot [f(0, 0, 1, \cdots, 0) \vee x_1 \vee x_2 \vee 0 \vee \cdots \vee x_n] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdot [f(0, 0, \cdots, 0) \vee x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n] \qquad (73)
\end{aligned}
$$

把此式简单地表示成如下形式:

乘法标准型

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= & \bigwedge_{l} f(e_1, e_2, \cdots, e_n) \vee x_1^{\bar{e}_1} \vee x_2^{\bar{e}_2} \vee \cdots \vee x_n^{\bar{e}_n} \qquad (74)
\end{aligned}
$$

其中

$$
x_i^{\bar{e}_i} = \begin{cases} x_i, & e_i = 0^{1)} \\ 0, & e_i = 1 \end{cases}
$$

例 求模糊函数

$$
f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1 \vee x_2) \cdot x_3] \vee [(x_1 \vee x_3) \cdot x_2]
$$

的标准型。

首先，$f(e_1, e_2, e_3)$ 成为表 1 那个样子. 从而，$f(x_1, x_2, x_3)$ 的加法标准型则成为

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3) \\
= & (x_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)
\end{aligned}
$$

---

1) 布尔函数的情形，

$$
x_i^{\bar{e}_i} = \begin{cases} x_i, & e_i = 0 \\ \bar{x}_i, & e_i = 1 \end{cases}
$$

$$= (x_1 \cdot x_2) \vee (x_2 \cdot x_3) \vee (x_3 \cdot x_1)$$

而乘法标准型则成为

$$f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee_3) \cdot (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$$
$$= (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot (x_3 \vee x_1)$$

因而可知模糊函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是**中值函数**。

表 1

e_1	e_2	e_3	$f(e_1, e_2, e_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

由于运用了模糊集的概念，而使模糊逻辑规范化，上面介绍了模糊逻辑的基本性质，模糊函数的分析与综合等等。在那种情形下，作为模糊逻辑的运算，是采用了逻辑和（$\vee$）、逻辑积（$\wedge$）以及否定（$\overline{\ }$）的三个基本运算，另外，模糊变数是取区间[0，1]之间的值的。

现在，利用传统的连续逻辑的概念，引入$\vee$，$\wedge$，$\overline{\ }$等运算以外的通常的乘法和加法等运算，进而讨论其区间也不限于[0，1]的情形。这样，使得模糊逻辑具有柔软性，因而其应用范围随之扩大。

下面叙述扩充定义的模糊逻辑的基本性质、模糊函数的微分和积分等。

§5. 模糊逻辑的扩充定义

前面讲的模糊逻辑的变数，假定只取区间 $[0,1]$ 之间的值．但是，在这里取消这种假定，更为一般地，变数可以取区间 $[a,b]$ 之间的值．在这种情形下，区间 $[a,b]$ 关于点 $c=(a+b)/2$ 是对称的．这个点 c 称之为区间 $[a,b]$ 的中心．当这样扩充区间时，其基本的逻辑运算可如下定义：

逻辑和 $x\vee y=\max(x,y)$ (75)

逻辑积 $x\wedge y=\min(x,y)$ (76)

否　定 $\bar{x}=(a+b)-x=2c-x$ (77)

其中，$x,y\in[a,b]$，$c=(a+b)/2$．

这种情况下，即使区间扩充到 $[a,b]$，逻辑和及逻辑积运算的性质还没有变，但是，请注意否定运算多少有点不同．另外，作为特殊情形，令 $a=0$，$b=1$，否定 $\bar{x}=1-x$，则成为前面讲的模糊逻辑的否定．参看公式 (8)．

(75)，(76) 式的逻辑和及逻辑积，由于运用单位阶级函数以及通常的代数和($+$)．代数积($\cdot$)，则可如下表示．

$$x\vee y=\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

$$=x\cdot\sigma(x-y)+y\cdot\sigma(y-x) \tag{78}$$

$$x\wedge y=\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

$$=x\cdot\sigma(y-x)+y\cdot\sigma(x-y) \tag{79}$$

在这里，σ 是**单位阶级函数**，它可如下定义[1]．

---

1) 单位阶级函数 σ 可以统一用如下的形式表示．

$$\sigma(x)=\frac{x}{|x|}\vee 0=\frac{x\vee 0}{x}=\frac{x+|x|}{2x}$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -0 \\ 1, & z \geqslant +0 \end{cases}$$

又,$|z|$表示z的绝对值.

运用这个单位阶级函数,n个变数$x_1, x_2, \cdots x_n$的逻辑和及逻辑积可如下表示:

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{\substack{K=1 \\ K \neq i}}^{n} \sigma(x_i - x_K)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{\substack{K=1 \\ K \neq i}}^{n} (x_K - x_i)$$

例如,$x_1 \vee x_2 \vee x_3$ 则成为

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee x_3 = & x_1\sigma(x_1 - x_2)\sigma(x_1 - x_3) \\ & + x_2\sigma(x_2 - x_1)\sigma(x_2 - x_3) \\ & + x_3\sigma(x_3 - x_1)\sigma(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

在(78),(79)式中,令 $y = \bar{x}(=2c - x)$,则导出

$$x \vee \bar{x} = c + |x - c| \tag{80}$$

$$x \wedge \bar{x} = c - |x - c| \tag{81}$$

像刚刚讲过的那样,在区间$[0, 1]$中,令 $a = 0, b = 1$,则否定成为$\bar{x} = 1 - x$,又,令$a = -b$,即设区间为 $[-b, b]$,则中点 $c = (a + b)/2 = 0$,根据(77)式,否定则可表示成

$$\bar{x} = -x \tag{82}$$

进而在(80),(81)式中,把 $c = 0$ 代入,则

$$x \vee \bar{x} = |x| \tag{83}$$

$$x \wedge \bar{x} = -|x| \tag{84}$$

关于模糊函数的运算,除像这样的逻辑和($\vee$)、逻辑积($\wedge$)、否定($\bar{\ }$)之外,还可以导入代数和($+$)、代数积($\cdot$)等等.这种情形下,必须注意的是当给出了某一模糊函数时,这些运算进行的顺序是个很重要的问题.对此,作如下规定.规

定代数积(·)最强，而逻辑积(∧)、逻辑和(∨)依次相继减弱，代数和(+)最弱．例如，在如下的模糊函数(85)式中，就表示着，首先取代数积 $\bar{z}\cdot w$，其次取这个积与 x 的逻辑积 $\bar{z}\cdot w\wedge x$，进而取这个逻辑积与 y 的逻辑和，最后在这个结果上加上 z。

$$f(x, y, z, w)=z+y\vee\bar{z}\cdot w\wedge x \tag{85}$$

但是，在如下的函数中，运算的顺序是清楚的．

$$f(x, y, z, w)=(x+y)\wedge(x+w)+x\cdot z \tag{86}$$

即，首先求代数和 $(x+y)$ 及 $(x+w)$、代数积 $x\cdot z$，其次求 $(x+y)$ 与 $(x+w)$ 的逻辑积，最后取这个结果与代数积的代数和．

还有，当模糊函数复杂时，由于适当地引用括号，可以使它容易分辨．例如，若把 (85) 式写成

$$f(x, y, z, w)=z+y\vee(\bar{z}\cdot w\wedge x)$$

则运算的顺序就非常清楚了．

下面试列出导入了代数和(+)及代数积(·)的运算的模糊函数中成立的重要的基本公式．因为能够很容易地确认这些公式而略去其证明．

另外，关于只用逻辑和(∨)、逻辑积(∧)的模糊函数的公式，请看 (10)—(23) 式．

(i)
$$\left.\begin{aligned} x+y\vee z&=(x+y)\vee(x+z)\\ x+y\wedge z&=(x+y)\wedge(x+z)\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned} x-y\vee z&=(x-y)\wedge(x-z)\\ x-y\wedge z&=(x-y)\vee(x-z)\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

(ii)
$$\left.\begin{aligned} x\vee y+z\vee w&=(x+z)\vee(x+w)\vee(y\\ &\quad+z)\vee(y+w)\\ x\wedge y+z\wedge w&=(x+z)\wedge(x+w)\wedge(y\\ &\quad+z)\wedge(y+w)\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \vee y - z \wedge w = (x - z) \vee (x - w) \vee (y \\ \quad - z) \vee (y - w) \\ x \wedge y - z \vee w = (x - z) \wedge (x - w) \wedge (y \\ \quad - z) \wedge (y - w) \end{array}\right\} \quad (90)$$

(iii) $(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y$

$$(x \vee y) - (x \wedge y) = |x - y| \quad (91)$$

$$(x \vee y) + (-x \wedge -y) = 0$$

(iv) $(x \vee y)(x \wedge y) = xy$

$$(x \vee y)(-x \vee -y) = -xy \quad (92)$$

(v) $(x \wedge y) \vee (-x \wedge -y)$

$$= -[(x \vee y) \wedge (-x \vee -y)]$$

$$= \frac{1}{2}[|x + y| - |x - y|] \quad (93)$$

(vi) $x \vee (-x) = |x|$

$$x \wedge (-x) = -|x| \quad (94)$$

(vii) $\overline{x + y} = \bar{x} - y$ (95)

(viii) $x \vee 0 = \frac{1}{2}(x - |x|)$

$$x \wedge 0 = \frac{1}{2}(x - |x|) \quad (96)$$

(ix) 把 x 的方幂定义为 $x^0 = 1$,

$x^n = x \cdot x^{n-1}$, 则

$$\left.\begin{array}{l} (x \vee y)^{2n} = |(|x|x^{2n-1}) \vee (|y|y^{2n-1})| \\ (x \wedge y)^{2n} = |(|x|x^{2n-1}) \wedge (|y|y^{2n-1})| \end{array}\right\} \quad (97)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x \vee y)^{2n-1} = x^{2n-1} \vee y^{2n-1} \\ (x \wedge y)^{2n-1} = x^{2n-1} \wedge y^{2n-1} \end{array}\right\} \quad (98)$$

(x) 设 $x, y, z \geqslant 0$，则[1]

$$\left.\begin{aligned} x(y \vee z) = xy \vee xz \\ x(y \wedge z) = xy \wedge xz \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

$$\left.\begin{aligned} -x(y \vee z) = -xy \wedge -xz \\ -x(y \wedge z) = -xy \vee -xz \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

(xi) 设 $x, y, z, w \geqslant 0$，则

$$\left.\begin{aligned} (x \vee y)(z \vee w) = xz \vee xw \vee yz \vee yw \\ (x \wedge y)(z \wedge w) = xz \wedge xw \wedge yz \wedge yw \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

$$\left.\begin{aligned} & (x \vee y)(-z \wedge -w) = -xz \wedge \\ & -xw \wedge -yz \wedge -yw \\ & (x \wedge y)(-z \vee -w) = -xz \vee \\ & -xw \vee -yz \vee -yw \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

(xii) 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为1变数函数，则

$$\begin{aligned} & f_1(x) \vee 0 + f_2(x) \vee 0 \\ & = [f_1(x) + f_2(x)] \vee f_1(x) \vee f_2(x) \vee 0 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} & f_1(x) \wedge 0 + f_2(x) \wedge 0 \\ & = [f_1(x) + f_2(x)] \wedge f_1(x) \wedge f_2(x) \wedge 0 \end{aligned} \tag{104}$$

注 假定代数和、代数积运算的结果，包含于给定的区间 $[a, b]$。

§6. 模糊函数的微分和积分

当给定了图11那样的函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 时，为了刻划

---

1) 当 x, y, z 为任意的实数时，运用单位阶级函数 σ 则可如下表示。

$$x(y \vee z) = (xy \vee xz)\sigma(x) + (xy \wedge xz)\sigma(-x)$$
$$x(y \wedge z) = (xy \wedge xz)\sigma(x) + (xy \vee xz)\sigma(-x)$$

进而如下的等式成立：

$$xy \vee xz = x(y \vee z)\sigma(x) + x(y \wedge z)\sigma(-x)$$
$$xy \wedge xz = x(y \wedge z)\sigma(x) + x(y \vee z)\sigma(-x)$$

它，通常以如下的形式表示：

$$F_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\leqslant x_1 \\ f_2(x), & x_1\leqslant x\leqslant x_2 \\ f_3(x), & x_2\leqslant x \end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases} f_4(x), & x\leqslant x_3 \\ f_5(x), & x_3\leqslant x\leqslant x_4 \\ f_6(x), & x_4\leqslant x \end{cases}$$

其中，$a\leqslant x\leqslant b$.

但是，图 11 那种情形，若使用逻辑和（∨）、逻辑积（∧）运算，则可以更简单地表示，即表示为

$$F_1(x)=f_1(x)\vee f_2(x)\vee f_3(x) \tag{105}$$

$$F_2(x)=f_4(x)\wedge f_5(x)\wedge f_6(x) \tag{106}$$

其中，$a\leqslant x\leqslant b$.

一般地，对于 n 个 1 次模糊函数（可表为 $f_i(x)=a_ix+b_i$）$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，象 (107) 式那样用逻辑和连结的函数，一般是凹的（参看图 11 的左图）.

$$\check{F}_1(x)=f_1(x)\vee f_2(x)\vee\cdots\vee f_n(x) \tag{107}$$

为了表示函数是凹的，象 (107) 式那样，以函数 $F_1(x)$ 上面附上"∨"的 $\check{F}_1(x)$ 来表示. 与此相反，象 (108) 式那样，用逻辑积连结的函数，一般是凸的（参看图 11 的右图）. 用 $\hat{F}_2(x)$

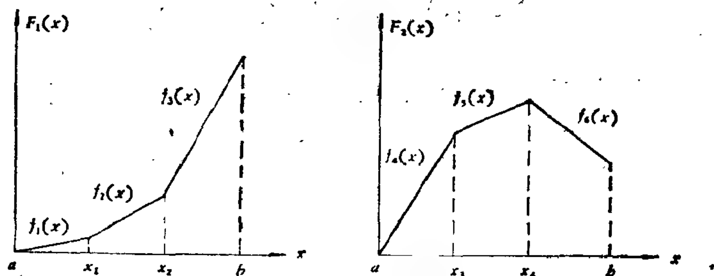


图 11 凹模糊函数及凸模糊函数的例

表示。

$$\tilde{F}_2(x) = f_1(x) \wedge f_2(x) \wedge \cdots \wedge f_n(x) \tag{108}$$

因此，把 1 次模糊函数用逻辑和或者逻辑积连结的函数，即凹函数，凸函数的微分和积分，可以如下表示，

(I) 当

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(x) &= \max[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)] \\ &= f_1(x) \vee f_2(x) \vee \cdots \vee f_n(x)\end{aligned} \tag{109}$$

时，则

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{F}_1(x)}{dx} &= \frac{df_1(x)}{dx}\left[1 - \frac{[f_1(x) - f_2(x)] \wedge 0}{f_1(x) - f_2(x)}\right] \\ &+ \frac{df_2(x)}{dx}\left[\frac{[f_1(x) - f_2(x)] \wedge 0}{f_1(x) - f_2(x)}\right. \\ &\left. - \frac{[f_2(x) - f_3(x)] \wedge 0}{f_2(x) - f_3(x)}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{df_n(x)}{dx} \cdot \frac{[f_{n-1}(x) - f_n(x)] \wedge 0}{f_{n-1}(x) - f_n(x)}\end{aligned} \tag{110}$$

紧凑点写则为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\bigvee_{i=1}^{n} f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{df_i(x)}{dx}\left[\frac{[f_{i-1}(x) - f_i(x)] \wedge 0}{f_{i-1}(x) - f_i(x)}\right. \\ &\left. - \frac{[f_i(x) - f_{i+1}(x)] \wedge 0}{f_i(x) - f_{i+1}(x)}\right]\end{aligned}$$

其次，积分是

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{F}_1(x)dx &= \int_a^b f_1(x)dx \\ &- \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \wedge 0 dx\end{aligned}$$

$$-\cdots-\int_a^b [f_{n-1}(x)-f_n(x)]\wedge 0dx \tag{111}$$

紧凑点写则为:

$$\int_a^b \bigvee_{i=1}^{n} f_i(x)dx = -\int_a^b \sum_{i=1}^{n} [f_{i-1}(x)-f_i(x)]\wedge 0\cdot dx$$

(II) 当

$$\begin{aligned}\hat{F}_2(x) &= \min[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)] \\ &= f_1(x)\wedge f_2(x)\wedge\cdots\wedge f_n(x)\end{aligned} \tag{112}$$

时,微分是

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{F}_2(x)}{dx} &= \frac{df_1(x)}{dx}\left[1-\frac{[f_1(x)-f_2(x)]\vee 0}{f_1(x)-f_2(x)}\right] \\ &+ \frac{df_2(x)}{dx}\left[\frac{[f_1(x)-f_2(x)]\vee 0}{f_1(x)-f_2(x)}\right. \\ &\left.-\frac{[f_2(x)-f_3(x)]\vee 0}{f_2(x)-f_3(x)}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{df_n(x)}{dx}\cdot\frac{[f_{n-1}(x)-f_n(x)]\vee 0}{f_{n-1}(x)-f_n(x)}\end{aligned} \tag{113}$$

紧凑点写则为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\bigvee_{i=1}^{n} f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{df_i(x)}{dx}\left[\frac{[f_{i-1}(x)-f_i(x)]\vee 0}{f_{i-1}(x)-f_i(x)}\right. \\ &\left.-\frac{[f_i(x)-f_{i+1}(x)]\vee 0}{f_i(x)-f_{i+1}(x)}\right]\end{aligned}$$

积分是

$$\begin{aligned}\int_a^b \hat{F}_1(x)dx &= \int_a^b f_1(x)dx \\ &-\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\vee 0\cdot dx\end{aligned}$$

$$-\cdots-\int_a^b[f_{n-1}(x)-f_n(x)]\vee 0\cdot dx \qquad (114)$$

紧凑点写则为

$$\int_a^b \bigwedge_{i=1}^{n} f_i(x)dx=-\int_a^b \sum_{i=1}^{n}[f_{i-1}(x)-f_i(x)]\vee 0\cdot dx$$

例 图 11 的左图中函数 $\check{F}_1(x)=f_1(x)\vee f_2(x)\vee f_3(x)$ 的积分 $\int_a^b \check{F}_1(x)dx$，根据(111)式，则为图 12 中的面积 S_1，S_2，S_3 相加之和．即

$$\int_a^b \check{F}_1(x)dx=S_1+S_2+S_3$$

其中

$$S_1=\int_a^b f_1(x)dx$$

$$S_2=-\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\wedge 0\cdot dx$$

$$S_3=-\int_a^b[f_2(x)-f_3(x)]\wedge 0\cdot dx$$

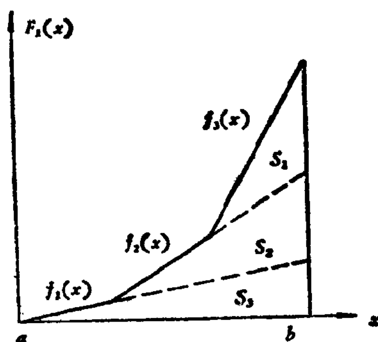


图 12　积分 $\int_a^b[f_1(x)\vee f_2(x)\vee f_3(x)]dx$ 的例

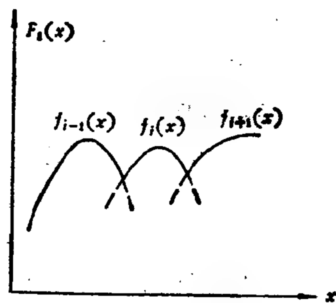


图 13　$F_1(x)=\bigvee_{i=1}^{n} f_i(x)$

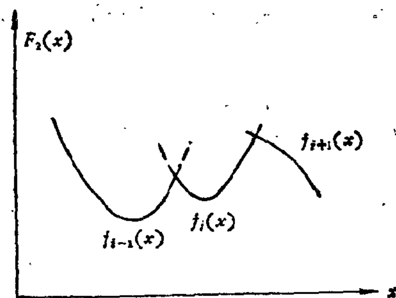


图 14 $F_2(x)=\bigwedge_{i=1}^{n} f_i(x)$

这里假定模糊函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$ 是 1 次函数，即可用直线表示，然而更一般地，如图 13，图 14 那样，把高次模糊函数 $f_i(x)$ 用逻辑和或者逻辑积连结的情形，刚刚讲过的微分、积分的公式也都成立。

§7. 模糊逻辑函数应用举例

运用模糊逻辑函数可以说明函数逼近、内插法等问题，这一节就要介绍这些问题。

函数逼近

现在，假设 $y=\varphi(x)$ 是给定的单变量的连续函数。在给定的误差 ε 的范围内，也就是在满足

$$|\varphi(x)-F(x)|\leqslant\varepsilon \tag{115}$$

的条件下，我们考虑用 $F(x)$ 来逼近 $\varphi(x)$。设 $F(x)$ 是由 $f_1(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$这样的函数(称为**生成函数**)的一部分构造成的，亦即假设把变数 x 可取值的范围适当地分为若干个区间，这时在第 i 个区间 $F(x)=f_i(x)$。又，设第 i 个区间为 $[A_i$,

B_i]，则根据(115)式，必然满足 $|\varphi(x)-f_i(x)|\leqslant\varepsilon$，其中，$A_i\leqslant x\leqslant B_i$.

但是，生成函数 $f_i(x)$ 一般是光滑曲线就可以. 在这里，我们将介绍用直线，即用一次函数 ($f_i(x)=a_ix+b_i$) 来表示的情形. 那么，因为 $F(x)$ 是由 $f_i(x)$ (即直线)构成的，所以 $F(x)$ 就成为**分段线性函数**，亦即成为折线. 从而，便成为对所给定的函数 $\varphi(x)$ 作折线逼近的问题了.

先从简单的例子讲起. 我们叙述给定的函数 $\varphi(x)$ 具有唯一的极值的情形(例如，二次函数等).

(1) 在函数 $\phi(x)$ 下凸，即 $\varphi''(x)\geqslant 0$ 的情形下，设在第 i 个区间 $f_i(x)\geqslant f_{K\neq i}(x)$，则所求的分段线性函数 $\check{F}(x)$ 能够像下面那样，用逻辑和(∨)连结的方式给出 (参看 15 图(a)).

$$\begin{aligned}\check{F}(x)&=f_1(x)\vee f_2(x)\vee\cdots\vee f_n(x)\\&=\max(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\end{aligned}\qquad(116)$$

其中，$f_i(x)$ 在第 i 个区间是满足 $|\varphi(x)-f_i(x)|\leqslant\varepsilon$ 的.

对偶地，当 $\varphi(x)$ 为上凸的情形，可以用逻辑积(∧)连结来说明.

(2) $\varphi(x)$ 为上凸的情形，即 $\varphi''(x)\leqslant 0$ 的情形，设 $f_i(x)\leqslant f_{K\neq i}(x)$，则所求的分段线性函数 $\hat{F}(x)$ 可以用

$$\begin{aligned}\hat{F}(x)&=f_1(x)\wedge f_2(x)\wedge\cdots\wedge f_n(x)\\&=\min(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\end{aligned}\qquad(117)$$

来给出(参看图 15(b)).

上面在单变量函数 $\varphi(x)$ 下凸或上凸的情形下，对生成函数 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 分别用逻辑和(∨)、逻辑积(∧)进行结合，求出了逼近 $\varphi(x)$ 的函数 $\check{F}(x)$，$\hat{F}(x)$.

像前面讲的那样，求具有一个极值的函数 $\varphi(x)$ 的折线逼近的情形，是有 $\varphi''(x)\geqslant 0$ 或 $\varphi''(x)\leqslant 0$ 这样条件的. 更进

一步，当一阶微分满足 $\varphi'(x) \geqslant 0$ 或 $\varphi'(x) \leqslant 0$ 时，即 $\varphi(x)$ 为单调函数的情形，试求逼近 $\varphi(x)$ 的折线 $F(x)$ 的逆函数 $G(y)$。设对应于 $y = f_i(x)$ 的逆函数为 $x = g_i(y)$，即设 $f_i(x) = a_i x + b_i$，则 $g_i(y) = \left(\frac{1}{a_i}\right) y - \frac{b_i}{a_i}$。例如，当

$$y = F(x) = \bigvee_{i=1}^{n} f_i(x)$$

时，则 $F(x)$ 的逆函数 $G(y)$ 可如下给出：

$$x = G(y) = \begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{n} g_i(y), & \varphi'(x) \geqslant 0 \\ \bigvee_{i=1}^{n} g_i(y), & \varphi'(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

同样地，当

$$y = F(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i(x)$$

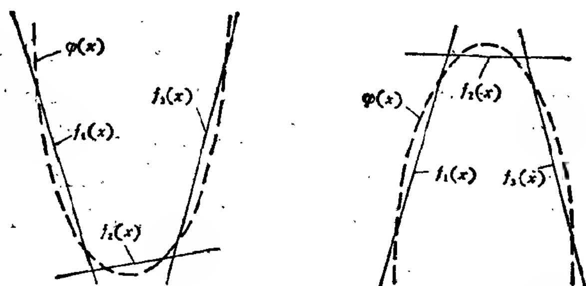
时，则其逆函数可用下式给出：

$$x = G(y) = \begin{cases} \bigvee_{i=1}^{n} g_i(y), & \varphi'(x) \geqslant 0 \\ \bigwedge_{i=1}^{n} g_i(y), & \varphi'(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

其次，我们来讲像图 16 那样，函数 $\varphi(x)$ 具有多个极值（极大值与极小值）的情形。

首先，设图 16 中的曲线，可以像图 17 那样，用 $f_i(x)$ $(i = 1, \cdots, 9)$ 来表示，则所求的折线函数 $F(x)$ 就可以像下面那样用逻辑和 (max)、逻辑积 (min) 来表示之。

$$\begin{aligned} F(x) = \min[&\max(f_1(x), f_2(x), f_3(x)), \\ &\min(f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_7(x)), \\ &\max(f_8(x), f_9(x))] \end{aligned}$$



(a) $\varphi(x)$ 下凸的情形　　(b) $\varphi(x)$ 上凸的情形

图 15　具有 1 个极值的函数的逼近之例

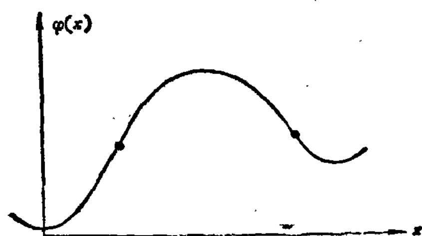


图 16　具有多个极值的函数
（这里的黑点表示拐点）

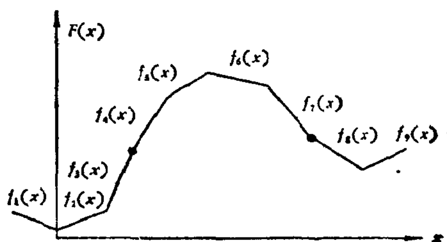


图 17　关于图 16 $\varphi(x)$ 的逼近函数 $F(x)$

但是，当极值的个数增多时，可以设想运用这个方法将要相当复杂。因而，下面我们来介绍由于引入辅助函数 $A(x)$ 而能够

非常简捷地表述 $F(x)$ 的方法.

例如,在图 18 中,设通过拐点(即 $\varphi''(x)=0$ 的点)a, b, c, d, e 的折线为 $A(x)$, 则 $\varphi(x)$ 由 $A(x)$ 分为上凸及下凸的函数. 在这个图上,上凸的函数是 $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, 下凸的函数是 $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$. 那么,象刚刚讲过的那样,下凸及上凸的函数,就可以根据 (116), (117) 式用逻辑和(∨)、逻辑积(∧)进行逼近. 设 $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$ 及 $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$ 按 (116), (117) 式以折线逼近的函数分别为 $\hat{F}_1(x)$, $\hat{F}_3(x)$, $\check{F}_2(x)$, $\check{F}_4(x)$, 则其图形就象图 18, 图 19 那样. 因此,图 19 中的折线函数 $F(x)$, 则可以用 $\hat{F}_1(x)$, $\hat{F}_3(x)$, $\check{F}_2(x)$, $\check{F}_4(x)$ 以及通过拐点的辅助函数 $A(x)$, 以如下的两种方法表示. 即可表示为

$$F(x) = \min\{\max[\hat{F}_1(x), \hat{F}_3(x), A(x)], \min[\check{F}_2(x), \check{F}_4(x)]\}$$

或者

$$F(x) = \max\{\min[\check{F}_2(x), \check{F}_4(x), A(x)], \max[\hat{F}_1(x), \hat{F}_3(x)]\}$$

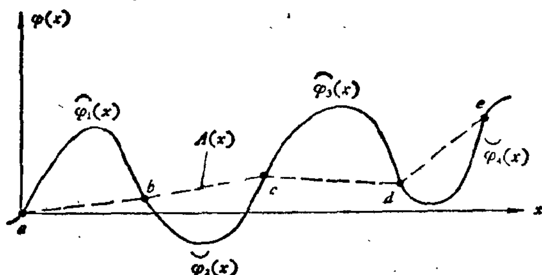


图 18　通过拐点的辅助函数 $A(x)$

因此,一般地则有

$$F(x) = [\hat{F}_1(x) \vee \cdots \vee \hat{F}_n(x) \vee A(x)] \wedge \check{F}_1(x) \wedge \cdots \wedge \check{F}_m(x)$$

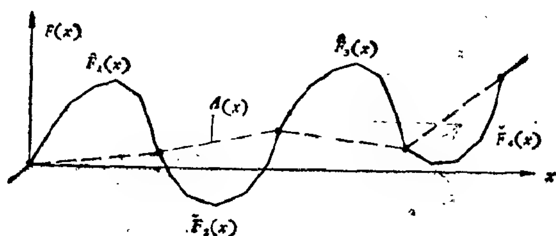


图 19　图 18 的函数逼近

$$= \left[\bigvee_{i=1}^{n} \hat{F}_i(x) \vee A(x) \right] \bigwedge_{j=1}^{m} \check{F}_j(x) \qquad (118)$$

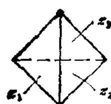
$$F(x) = [\check{F}_1(x) \wedge \cdots \wedge \check{F}_m(x) \wedge A(x)] \vee \hat{F}_1(x) \vee \cdots \vee \hat{F}_n(x)$$

$$= \left[\bigwedge_{j=1}^{m} \check{F}_j(x) \wedge A(x) \right] \bigvee_{i=1}^{n} \hat{F}_i(x) \qquad (119)$$

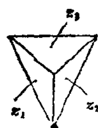
上面，假定函数 ϕ 是单变量的，下面简单地介绍多变量的情形。设 φ 为 n 个变量的函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，则与单变量情形相同，$\varphi$ 可以用对生成函数 $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ 施行逻辑运算而得的分段函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 来逼近．在这里，假定生成函数 f_i 是线性的，即假定 $f_i(x_1, \cdots, x_n) = a_i + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{ni}x_n$，并且假定在第 i 个区间 $F(x_1, \cdots, x_n) = f_i(x_1, \cdots, x_n)$。

例如，设给定函数 φ 是两个变量的函数 $\varphi(x_1, x_2)$，则相应的生成函数 $f_i(x_1, x_2) = a_i + a_{1i}x + a_{2i}x_2$ 表示平面，对这些平面施以逻辑运算则成为多面体。这样一来，一般地，假如用多面体来逼近曲面，则必须对曲面上的椭圆点、双曲点、抛物点进行平面逼近。图 20 表示出了最简单的逼近多面体及其逻辑函数。z_1，z_2，$\cdots$ 是生成平面（生成函数），z 是所求的多面体。

例　试对图 21 那样的曲面（虚线部分）进行平面逼近。

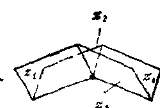


$z = z_1 \wedge z_2 \wedge z_3$
$(\varphi''_{xx} < 0,\ \varphi''_{yy} < 0)$



$z = z_1 \vee z_2 \vee z_3$
$(\varphi''_{xx} > 0, \varphi''_{yy} > 0)$

(a) 椭圆面 $(\varphi''^2_{xy} < \varphi''_{xx} \cdot \varphi''_{yy})$



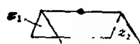
$z = (z_1 \vee z_2) \wedge (z_3 \vee z_4)$



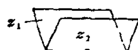
$z = (z_1 \wedge z_2) \vee (z_3 \wedge z_4)$

(b) 双曲面 $(\varphi''^2_{xy} > \varphi''_{xx} \cdot \varphi''_{yy})$

(i) 无弯曲的情形

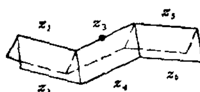


$z = z_1 \wedge z_2$

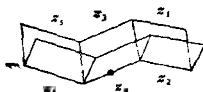


$z = z_1 \vee z_2$

(ii) 有弯曲的情形



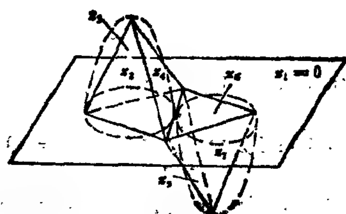
$z = (z_1 \wedge z_2) \vee (z_3 \wedge z_4 \wedge z_5 \wedge z_6)$



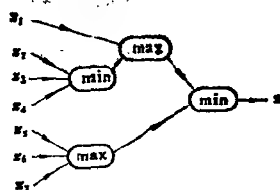
$z = (z_1 \vee z_2) \wedge (z_3 \vee z_4 \vee z_5 \vee z_6)$

(c) 抛物面 $(\varphi''^2_{xy} = \varphi''_{xx} \varphi''_{yy})$

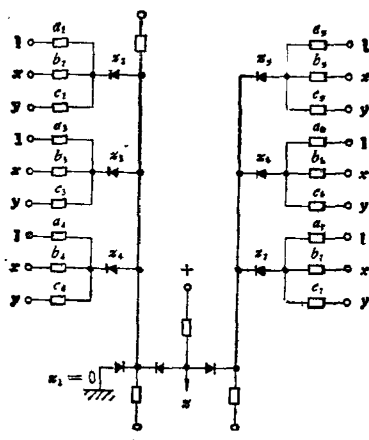
图 20　对曲面上点的邻域的平面逼近



(a)



(b)



(c)

图 21 曲面逼近的例及其回路的实现

虽然是很粗略的逼近，但是，可以用向上和向下的两个三棱锥来逼近，其逻辑式可表示为

$$z=[(z_2\wedge z_3\wedge z_4)\vee z_1]\wedge(z_5\vee z_6\vee z_7)$$

在这里，假定 z_1，z_2，$\cdots$，z_7 是生成平面，并且 $z_1=0$．另外，

生成平面还可以用 $z_i = a_i + b_i x + c_i y$ 表示。

现在，假定给出了如下的方程

$$F(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} f_i(x, y) = 0$$

在这里，设 $f_i(x, y)$ 是线性函数，即它是表示平面的．设 $y = g_i(x)$ 为 $f_i(x, y) = 0$ 的解，则 $F(x, y)$ 的解可由

$$y = \bigwedge_{i=1}^{n} g_i(x)$$

来给出．同样地，

$$F(x, y) = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i(x, y) = 0$$

的解，可由

$$y = \bigvee_{i=1}^{n} g_i(x)$$

来给出．

内插法

假定以 x 为变量的函数 $f(x)$，其形状是未知的，如图 22 那样，在某种间隔(是等间隔还是不等间隔都没有关系)上，已知对应于变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数值为 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$，近似地求对应于其间的变量的函数值的方法，则称为

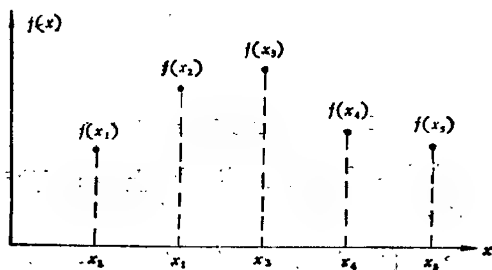


图 22

内插法。在这里，我们用模糊逻辑函数来说明拉格朗日内插法。

现在，假如已知对应于点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值 $f(x_1)$，$f(x_2), \cdots, f(x_n)$，则拉格朗日内插多项式可表为

$$F(x) = L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} L_i(x)f(x_i) \qquad (120)$$

其中的函数 $L_i(x)$，可用模糊逻辑函数如下表示[1]。若以图来表示 $L_i(x)$，则成为像图 23 那样的**三角形函数**。

$$L_i(x) = \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \wedge \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) \vee 0 \qquad (121)$$

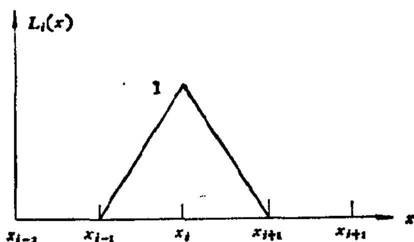


图 23　三角形函数 $L_i(x)$

例如图 22，若应用拉格朗日内插法，则成为图 24 那样。

下面说明多变量函数的拉格朗日内插法。首先，对 2 变数函数的情形，拉格朗日内插多项式可表为

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} L_{ij}(x, y)f(x_i, y_i) \qquad (122)$$

---

1) $L_i(x)$ 称为内插乘数，一般地可如下定义

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

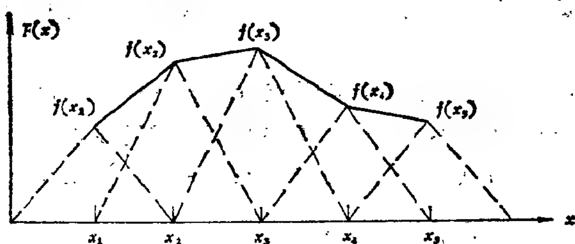


图 24　图 22 的内插逼近

在这里，利用 $L_{ij}(x, y) \approx L_i(x) L_j(y)$，则内插乘数 $L_{ij}(x, y)$ 可以近似地表示为

$$L_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\{[L_i(x) \wedge L_j(y)] \vee [L_i(x) \wedge L_j(y) + L_i(x) + L_j(y) - 1]\} \tag{123}$$

(参看图 25)

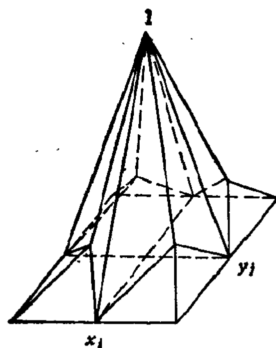


图 25　内插乘数 $L_{ij}(x, y)$

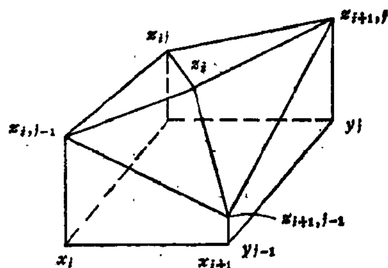


图 26　内插逼近的例

图 26 表示出对 z_{ij}，$z_{i,j-1}$，$z_{i+1,j}$，$z_{i+1,j-1}$ 四个点应用内插法的结果。中心 z_c 是

$$z_c = \frac{1}{4}(z_{ij} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j} + z_{i+1,j-1})$$

更一般地，n 变数函数的情形，拉格朗日内插多项式可如下给出

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} L_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) f(x_{1\alpha_1}, x_{2\alpha_2}, \cdots, x_{n\alpha_n}) \quad (124)$$

在这里，内插乘数可由

$$L_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left[\frac{1}{2^{n-1}} \bigwedge_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}(x_i)\right] \vee \left\{\bigwedge_{i=1}^{n}\left[L_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\cdots\alpha_n}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \frac{1}{2^{n-1}}(L_{\alpha_i}(x_i) - 1)\right]\right\} \quad (125)$$

来给出。设 $n=2$，则可导出前式 (123)。

上面讲了拉格朗日内插法，下面简单地说明一下牛顿内插法。

牛顿内插多项式可用

$$F(x) = k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + k_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \quad (126)$$

表示。在这里，系数 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ 可用

$$k_0 = F(x_0)$$

$$k_1 = [F(x_1) - F(x_0)]/(x_1 - x_0)$$

$$k_2 = \left[\frac{F(x_2) - F(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0}\right] \Big/ (x_2 - x_1)$$

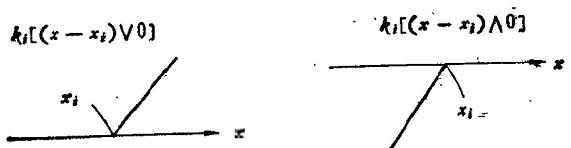
....

表示。

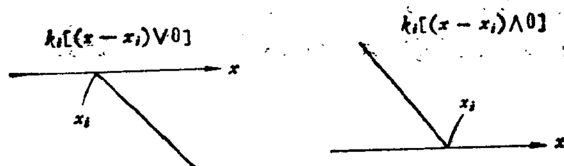
下面是比(126)式更粗略的逼近,是用逻辑积(∧)、逻辑和(∨)导出的内插公式

$$F(x) = k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i[(x - x_i) \vee 0] + \sum_{j=1}^{m} k_j[(x - x_j) \wedge 0] \tag{127}$$

在这里,n 表示在 x_0 右侧的内插点的个数,m 表示在 x_0 左侧的内插点的个数. 图 27 是在 $k_i > 0$, $k_i < 0$ 的情形下表示 $k_i[(x - x_i) \vee 0]$ 及 $k_i[(x - x_i) \wedge 0]$ 的图.



(a) $k_i>0$ 的情形

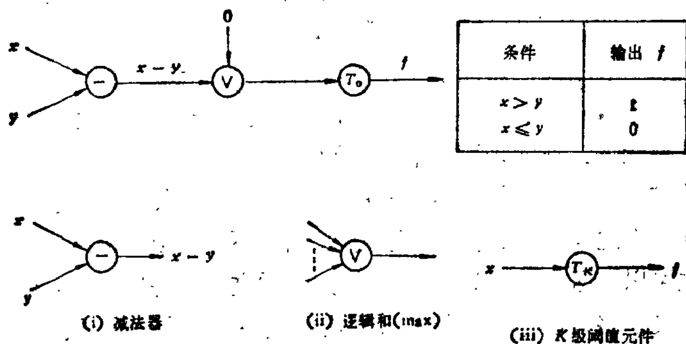


(b) $k_i<0$ 的情形

图 27 (127) 式的 $K_i[(x - x_i) \vee 0]$ 及 $K_i[(x - x_i) \wedge 0]$ 的图示

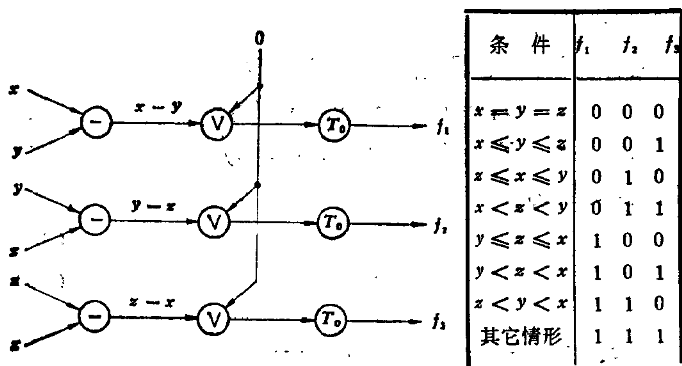
比较器

简单地讲一讲按多个输入的大小来进行分类的比较器。比较器在判定问题和模糊函数的综合等方面起着重要的作用。图 28, 图 29 表示出了两个输入及三个输入时的比较回路。四个输入以上的情形,也可以用同样的方法解决。



条件	输出 f
$x > y$	1
$x \leqslant y$	0

图 28　两个输入的比较回路



条　件	f_1	f_2	f_3
$x = y = z$	0	0	0
$x \leqslant y \leqslant z$	0	0	1
$z \leqslant x \leqslant y$	0	1	0
$x < z < y$	0	1	1
$y \leqslant z \leqslant x$	1	0	0
$y < z < x$	1	0	1
$z < y < x$	1	1	0
其它情形	1	1	1

图 29　三个输入的比较回路

§ 8. 模糊序贯回路

直到现在所讲过的模糊逻辑回路，其输出都仅仅依赖于当时的输入，亦即都是组合回路．这一节我们来说明，不仅根据现在给予的输入，而且也根据过去给予了什么样输入的历

程来改变输出反应方式的模糊逻辑回路，即具有存储的模糊逻辑回路(这种回路称为**模糊序贯回路**)．

一般序贯回路经常使用的继电器，其接点必为接通(=1)或断开(=0)的某一状态，继电器线圈必为励磁或没有励磁的某一状态．亦即是取2值状态的．但是，作为一般序贯回路的扩充的模糊序贯回路，则假设其继电器接点及线圈也可取0与1之间的值，并且假设输入、输出不仅可以取0，1，而且也可以取区间[0，1]的中间值．从后文的讨论中可知，模糊序贯回路可以作为一般序贯回路的直接的扩充来讨论．关于一般序贯回路的问题，由于篇幅所限，我们从略了．

首先，举例说明模糊序贯回路的分析．我们来看图30的模糊序贯回路．

这种情形，继电器线圈 Y_1 及 Y_2 可如下给出

$$Y_1 = (y_1 \vee \bar{x}_2 y_2 \bar{y}_1)(x_1 \vee y_2) \tag{128}$$

$$Y_2 = (\bar{y} \vee \bar{x}_2 y_2 y_1)(x_1 \vee y_2) \tag{129}$$

输出 z_1，z_2 则为

$$z_1 = y_2 \tag{130}$$

$$z_2 = \bar{y}_2 \tag{131}$$

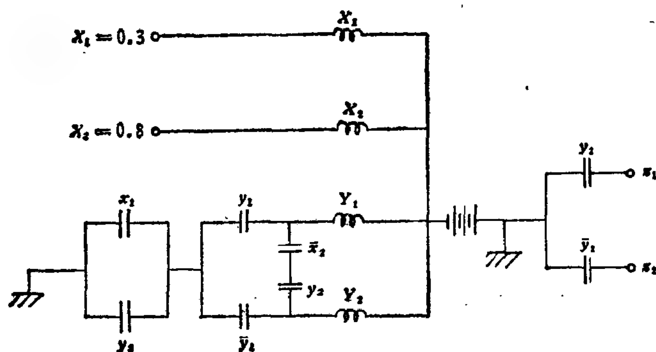


图30 模糊序贯回路

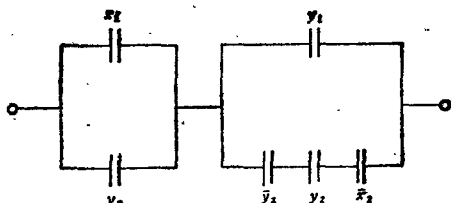


图 31　从线圈 Y_1 看继电器回路

另外，例如(128)式的 Y_1 可如下求出．从线圈 Y_1 看继电器回路，则成为图 31 那样，由此可求得 Y_1．用同样的方法，可求得 Y_2．

像刚刚说过的那样，输入可以取 [0，1] 之间的值．在这里，例如对输入逐步给予 $X_1 = 0.3$，$X_2 = 0.8$，则每个时刻继电器的励磁状态及输出可如下给出．其中，假定继电器 y_1，y_2 最初的值为 0．

第一步：

由于 $x_1^{(1)} = 0.3$，$x_2^{(1)} = 0.8$，所以(128)—(131)式为

$$Y_1^{(1)} = (0 \vee 0.2 \cdot 0 \cdot 1)(0.3 \vee 0) = 0$$

$$Y_2^{(1)} = (1 \vee 0.2 \cdot 0 \cdot 0)(0.3 \vee 0) = 0$$

$$z_1^{(1)} = 0$$

$$z_2^{(1)} = 1$$

第 2 步：

由于 $x_1^{(2)} = x_1^{(1)} = 0.3$，$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} = 0.8$，及 $Y_1^{(1)} = 0$，$Y_2^{(1)} = 0.3$，则 $y_1^{(2)} = 0$，$y_2^{(2)} = 0.3$．

从而

$$Y_1^{(2)} = (0 \vee 0.2 \cdot 0.3 \cdot 1)(0.3 \vee 0.3) = 0.2$$

$$Y_2^{(2)} = (1 \vee 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0)(0.3 \vee 0.3) = 0.3$$

$$z_1^{(2)} = 0.3$$

$$z_2^{(2)} = 0.7$$

第 3 步:

由于 $x_1^{(3)}=0.3$, $x_2^{(3)}=0.8$, $y_1^{(3)}=0.2$ 及 $y_2^{(3)}=0.3$，所以

$$Y_1^{(3)}=(0.2\vee 0.2\cdot 0.3\cdot 0.8)(0.3\vee 0.3)=0.2$$

$$Y_2^{(3)}=(0.8\vee 0.2\cdot 0.3\cdot 0.2)(0.3\vee 0.3)=0.3$$

$$z_1^{(3)}=0.3$$

$$z_2^{(3)}=0.7$$

第 4 步:

由于 $x_1^{(4)}=0.3$, $x_2^{(4)}=0.8$, $y_1^{(4)}=0.2$ 及 $y_2^{(4)}=0.3$，所以与第 3 步同样有

$$Y_1^{(4)}=0.2$$

$$Y_2^{(4)}=0.3$$

$$z_1^{(4)}=0.3$$

$$z_2^{(4)}=0.7$$

第 5 步以后全都和第 3 步得同样的结果。

把这些结果汇集起来，则如下列的表 1。

表 1

步数	继电器线圈（输入）		继电器接点				继电器线圈		输出	
	X_1	X_2	x_1	x_2	y_1	y_2	Y_1	Y_2	Z_1	Z_2
1	0.3	0.8	0.3	0.8	0	0	0	0.3	0	1
2	0.3	0.8	0.3	0.8	0	0.3	0.2	0.3	0.3	0.7
3	0.3	0.8	0.3	0.8	0.2	0.3	0.2	0.3	0.3	0.7
4	0.3	0.8	0.3	0.8	0.2	0.3	0.2	0.3	0.3	0.7

对应于输入的继电器的反应以及输出，虽然可以用上述的方法来求，但是是很麻烦的。下面，我们用矩阵给出比较统

一的研究方法。

把(128),(129)式改写一下,则成为

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= (y_1 \vee \bar{x}_2 y_2 \bar{y})(x_1 \vee y_2) \\
&= x_1 y_1 \vee \bar{x}_2 \bar{y} y_2 \vee y_1 y_2
\end{aligned} \tag{132}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= (\bar{y}_1 \vee \bar{x}_2 y_2 y_1)(x_1 \vee y_2) \\
&= x_1 \bar{y}_1 \vee \bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_2 y_1 y_2
\end{aligned} \tag{133}
$$

这些式子用矩阵表示,可表示为

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \bar{x}_2 & 1 \\ 0 & x_1 & 1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_1 y_2 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix} \tag{134}
$$

同样,输出 $Z_1 = y_2$, $Z_2 = \bar{y}_2$ 可表示为

$$
\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}^{1)} \tag{135}
$$

例如,在第一步中,设 $y_1^{(1)} = y_2^{(1)} = 0$,则(134)式成为如下的形式

$$
\begin{bmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \overline{x_2^{(1)}} & 1 \\ 0 & x_1^{(1)} & 1 & \overline{x_2^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ \overline{y_1^{(1)}} \\ \overline{y_1^{(1)}} y_2^{(1)} \\ y_1^{(1)} y_2^{(1)} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \overline{x_2^{(1)}} & 1 \\ 0 & x_1^{(1)} & 1 & \overline{x_2^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \end{bmatrix}
$$

---

1) 矩阵的积相当于第七章模糊矩阵中讲过的矩阵积. 即,设 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 为模糊矩阵,则 A 与 B 的矩阵积可定义如下,其中 $0 \leqslant a_{ij}, b_{ij} \leqslant 1$.

$$
C = AB \Longleftrightarrow c_{ij} = \max_k \min[a_{ik}, b_{kj}] = \bigvee_k [a_{ik} \wedge b_{kj}]
$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

当输入 X_1, X_2 不变时，即 $x_1^{(1)}=x_1^{(2)}=\cdots$, $x_2^{(1)}=x_2^{(2)}=\cdots$ 的情形，在第 2 步，由于 $y_1^{(2)}=Y_1^{(1)}$, $y_2^{(2)}=Y_2^{(1)}$, 则

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(2)} \\ Y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & 0 & \overline{x_2^{(2)}} & 1 \\ 0 & x_1^{(2)} & 1 & \overline{x_2^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ \overline{y_1^{(2)}} \\ \overline{y_1^{(2)}} y_2^{(2)} \\ y_1^{(2)} y_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \overline{x_2^{(1)}} & 1 \\ 0 & x_1^{(1)} & 1 & \overline{x_2^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \cdot x_1^{(1)} \\ 0 \cdot x_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \; \overline{x_2^{(1)}} \\ x_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

从而，设 $x_1^{(1)}=x_1^{(2)}=\cdots=0.3$, $x_2^{(1)}=x_2^{(2)}=\cdots=0.8$, 则 $Y_1^{(2)}=0.2$, $Y_2^{(2)}=0.3$, 这和上面求得的结果是一致的。

上面我们讲了模糊序贯回路的分析，下面来讲模糊序贯回路的综合. 这种情形，仍然用例子来说明.

像在 § 3. 讲过的那样，讨论模糊函数的综合时，是把区间 [0, 1] 分成如下有限个区间来进行的:

第 1 级: $a_1 \leqslant x \leqslant 1$

第 2 级: $a_2 \leqslant x < a_1$

$\vdots \qquad \vdots$

第 n 级 $0 \leqslant x < a_{n-1}$

其中，$1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > 0$.

对模糊序贯回路进行综合的情形，我们仍然按照把区间 [0, 1] 分成这样有限个级来说明.

例 试设计具有如下特征的两个输入一个输出的模糊序

贯回路(图 32)。对于输入 X_2 来说，若 $X_2 \geqslant a$，则输出 Z 与输入 X_1 相同；若 $X_2 < a$，则输出和前一步的输出相同. 并且，假定作为输入的 X_1，X_2 不同时变化. 在这里，按极其简单的情形，把 X_1，X_2 分为如下的两级. 对于每个 $i = 1, 2$，设

第一级：$a \leqslant x_i \leqslant 1$

第二级：$0 \leqslant x_i < a$

这时使用如下的记法，即假定对于每个 $i = 1, 2$，若 $a \leqslant X_i \leqslant 1$，则 $X_i = a^+$；若 $0 \leqslant X_i < a$ 则 $X_i = a^-$. 那么，由此可得像表 2 那样的流程表.

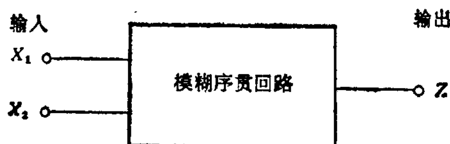


图 32　例中的模糊序贯回路

表 2　流　程　表

	a^-a^-	a^-a^+	a^+a^+	a^+a^-	Z
1	①	3	—	5	a^-
2	②	3	—	6	a^+
3	1	③	4	—	a^-
4	—	3	④	6	a^+
5	1	—	4	⑤	a^-
6	2	—	4	⑥	a^+

模糊序贯回路用状态过渡图表示，如图 33，其中，在状态 1，3，5 时，输出端输出 a^-，在状态 2，4，6 时，输出端输出 a^+.

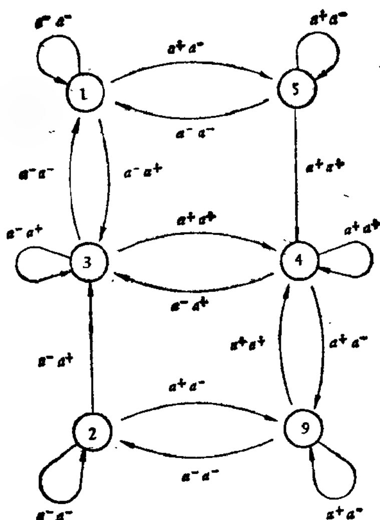


图 33　状态过渡图

表 3　简化了的流程表

a^-a^-	a^-a^+	a^+a^+	a^+a^-	Z
①	③	4	⑤	a^-
②	3	④	⑥	a^+

表 4　状态、输出分配表

Y \ X_1X_2	a^-a^-	a^-a^+	a^+a^+	a^+a^-	Z
a^-	a^-	a^-	a^+	a^-	a^-
a^+	a^+	a^-	a^+	a^+	a^+

若把表 2 的流程表简化，则可得到表 3 那样的流程表。

这种情形，由于是2行的，所以，可使用一个继电器. 设此继电器为 Y，并假定它和 X_1，X_2 的情形一样分为两个级：即 $a \leqslant Y \leqslant 1$ 时令 $Y = a^+$；$0 \leqslant Y < a$ 时令 $Y = a^-$。那么，与一般序贯回路的方法一样，可以象表 4 那样进行状态分配. 把这个状态分配用状态过渡图来表示，如图 34.

因此，对应于继电器及输出的模糊逻辑函数则为

$$Y = x_1x_2\bar{y} \vee x_1x_2y \vee \bar{x}_1\bar{x}_2y \vee x_1\bar{x}_2y$$

$$Z = Y$$

把它表示为回路，如图 35.

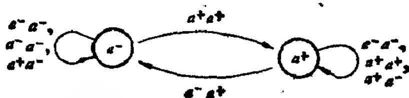


图 34 简化了的过渡图

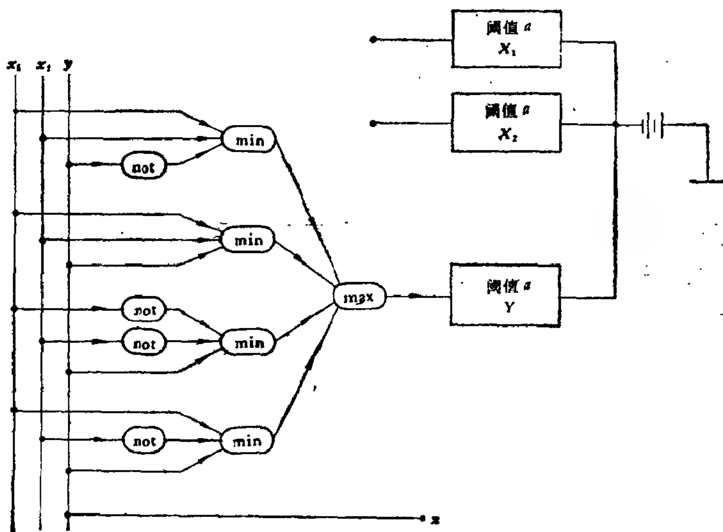


图 35 输入、继电器的阈值相同情形的回路实现

直到现在，我们一直是把输入 X_1，X_2 及继电器 Y 分别分为两个级，并且采用同一的阈值 a。下面更一般地，就以不同的值把 X_1，X_2，Y 分别分为两个级的情形，来说明刚刚讲过的例题。例如，把 X_1，X_2 及 Y 分别按阈值 a，b，c 分为两个级：

$$X_1: \begin{cases} 第1级: & a \leqslant X_1 \leqslant 1 \\ 第2级: & 0 \leqslant X_1 < a \end{cases}$$

$$X_2: \begin{cases} 第1级: & b \leqslant X_2 \leqslant 1 \\ 第2级: & 0 \leqslant X_2 < b \end{cases}$$

$$Y: \begin{cases} 第1级: & c \leqslant Y \leqslant 1 \\ 第2级: & 0 \leqslant Y < c \end{cases}$$

其中，$0 < a, b, c < 1$。

另外，和刚刚讲过的方法同样的作如下的规定。即令

$$X_1 = \begin{cases} a^+, & a \leqslant X_1 \leqslant 1 \\ a^-, & 0 \leqslant X_1 < a \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} b^+, & b \leqslant X_2 < 1 \\ b^-, & 0 \leqslant X_2 < b \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} c^+, & c \leqslant Y \leqslant 1 \\ c^-, & 0 \leqslant Y < c \end{cases}$$

则和表 4 同样，所求的状态分配如表 5，其回路的实现，用在 § 3. 讲过的方法，如图 36。

表 5 阈值不同的情形的状态分配表

		X_1X_2				
		a^-b^-	a^-b^+	a^+b^+	a^+b^-	Z
Y	c^-	c^-	c^-	c^+	c^-	c^-
	c^+	c^+	c^-	c^+	c^+	c^+

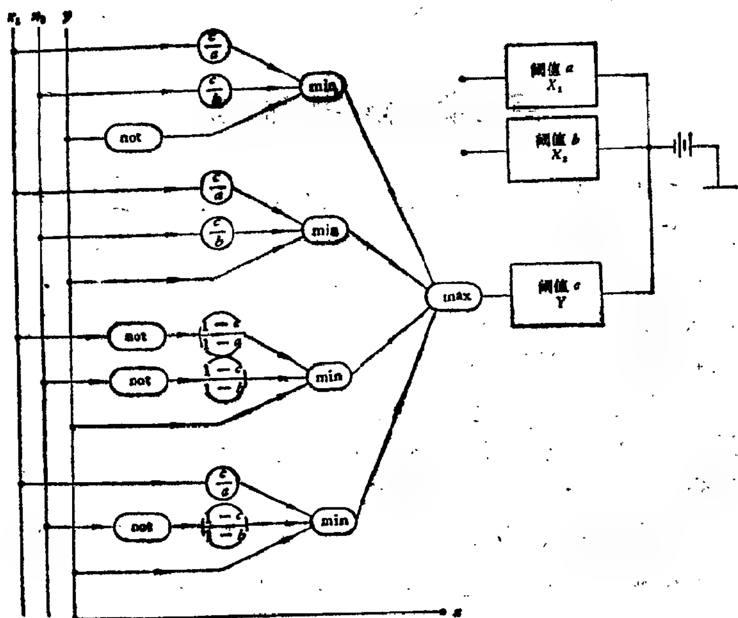


图 36　输入、继电器的阈值不同情形的回路实现

第九章　模糊系统

像生物学、社会科学、经济学、哲学、心理学等很复杂的系统，或者定义得不分明的系统，都是不能用以往的准确、严密的分析法处理的软领域。在非软的领域中，像大规模交通控制系统、模式识别系统、机器翻译、大规模信息处理系统、大规模电力送配网、神经网络、博奕等，也有由于其复杂性难以用传统的数学方法进行分析的分支。在这类分支中特有的性质，不仅由于概率意义下的不规则性，而且由于识别分类上的不分明性，而存在所谓“模糊性”。

在这一章，我们要用能对不分明事项进行定量处理的模糊集的概念，对不分明定义的系统(模糊系统)进行说明。

§1. 模糊系统

所谓模糊系统是指输入、输出、状态都具有模糊性的系统比如我们来考虑如下的例子。假定某人的状态是“严重感冒”。作为输入是“吃了好药”。那么作为输出就是“热稍有下降”。而下一个状态就是“感冒稍见好转”。由于这些状态、输入、输出都是模糊的，所以可以把“某人”看作是模糊系统。

这一节我们来说明这种状态、输入、输出是模糊的模糊系统。在这之前先叙述一下普通的确定性及非确定性系统，我们将说明模糊系统可以作为它们的扩张来论述。

若设在某系统 A 中 u_t，y_t 及 x_t 分别为在时刻 t 的输入、输出、状态，则当系统 A 用下面形式的状态方程表示其特征

时，称 A 为**确定性的**.

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \tag{1}$$

$$y_t = g(x_t, u_t) \tag{2}$$

这里 f，g 分别称为**状态转移函数**，**输出函数**. 它们是如下定义的.

$$f:\ X \times U \to X$$

$$g:\ X \times U \to Y$$

这里 X，U，Y 分别称为**状态空间**，**输入空间**，**输出空间**. 假定各元素都是取实数值的.

式(1)表示当系统状态为 x_t 时，加上输入 u_t 以后，系统转移到下一个状态 x_{t+1}. 式(2)表示当状态为 x_t，输入为 u_t 时，输出为 y_t.

其次，所谓某一系统 A 是**非确定性的**，它是确定性系统情况的推广，指的是下一个状态 x_{t+1}、输出 y_t 不完全由前一个状态 x_t、输入 u_t 来决定的情况. 当 x_t，u_t 已给时，x_{t+1}，y_t 取值集合我们分别用 X^{t+1}，Y^t（详细地应记为 $X^{t+1}(x_t, u_t)$，$Y^t(x_t, u_t)$）来表示. 这样一来，X^{t+1}，Y^t 作为 (1)，(2)式的推广可表示为

$$X^{t+1} = F(x_t, u_t) \tag{3}$$

$$Y^t = G(x_t, u_t) \tag{4}$$

这里函数 F，G 分别为

$$F:\ X \times U \to 2^X$$

$$G:\ X \times U \to 2^Y$$

其中 2^X 称为 X 的幂集合，表示 X 的全部子集. 因此 X^{t+1}，Y^t 分别是 X，Y 的子集. 式(3)所表达的意思是这样，比如若设 $X^{t+1} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq X$，则当 x_t，u_t 已给时，作为下一个状态可取 α，β，γ 中的某一个.

进一步，作为非确定系统的推广，假定 X^{t+1} 及 Y^t 不仅

是 X，Y 中的子集，而且还是模糊集，这时系统 A 称为**模糊系统**[1]。

设 x_t，u_t 已给时表示模糊集 X^{t+1}，Y^t 特征的隶属函数分别为[2]

$$\mu_X(x_{t+1} | x_t, u_t)$$

$$\mu_Y(y_t | x_t, u_t)$$

这样一来，则说模糊系统 A 是由这样两个隶属函数表示其特征的。

例 设 $X = R^3$，这里 R 为实数集合。则具有如下性质的系统为模糊系统。即"在时刻 t 的状态为 $x_t = (3, 5, 1)$ 时，加上输入 $u_t = 5$ 以后，则在下一时刻 $t+1$ 时 A 的状态在点（7，3，5）附近"，具有这样特征的系统为模糊系统。这里所说的点 $\alpha = (7, 3, 5)$ 附近的点（=状态）所组成的集合为 X 中的模糊集，比如可用如下的隶属函数表示其特征。

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{1}{K}\|x - \alpha\|\right)$$

其中 x 是 X 中的点，$\|x - 2\|$ 是向量 $x - 2$ 的模，K 是正常数。

下面，我们来求模糊系统的状态方程。先从无记忆的模糊系统这种简单的情况开始。

无记忆模糊系统 与普通的系统一样，所谓模糊系统 A 是**无记忆的系统**就是指条件模糊集 Y^t 不依赖于状态 x_t，即 Y^t 是用隶属函数

$$\mu_Y(y_t | u_t)$$

---

1) 若 X^{t+1}，Y^t 为普通集合，则模糊系统便成了非确定性系统。再若 X^{t+1}，Y^t 为由唯一元素所组成时，则非确定性系统便成了确定性系统。

2) 这时模糊集 X^{t+1}，Y^t 是具有参数 x_t，u_t 的条件模糊集。

表示其特征的。

在普通的无记忆的系统中，输入输出关系是用函数

$$y_t = g(u_t),\ \ y_t \in Y,\ \ u_t \in U$$

表示其特征的。而无记忆的模糊系统是用条件模糊集族 $\{Y^t(u_t)|u_t \in U\}$ 表示其特征的[1]。就是说对于输入空间 U 中的每一点 u_t，有输出空间 Y 中的模糊集合 $Y^t(u_t)$（简单地写成 Y^t）与之对应。因此可用

$$Y^t = G(u_t) \tag{5}$$

表示。这里 G 是从 U 到 Y 中模糊集族的映射。

其次，若设 U^t 是输入空间 U 中用隶属函数 $\mu_U(u_t)$ 表示其特征的模糊集，使用公式

$$\mu_B(y) = \bigvee_x [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y|x)]$$

$$= \sup \min[\mu_A(x),\ \mu_B(y|x)] \tag{6}$$

则对于模糊集 U^t，Y 中的模糊集 Y^t 可用如下的隶属函数表示其特征。

$$\mu_Y(y_t) = \bigvee_{u_t} [\mu_U(u_t) \wedge \mu_Y(y_t|u_t)] \tag{7}$$

因此，式 (7) 表示了两个模糊集 U^t, Y^t 之间的关系。我们把它表示如下

$$Y^t = G_0(U^t) \tag{8}$$

其中，G_0 是从 U 中模糊集族到 Y 中模糊集族的映射。

若 U^t 是由唯一元素组成时，即 $U^t = \{u_t\}$，则式 (8) 还原为式 (5)。

可以对 (5), (8) 式作如下的直观解释。式 (5) 表示，若 A 是无记忆的模糊系统，则对于每个非模糊输入 u_t，有模糊

---

1) 条件模糊集 $Y^t(u_t)$ 用隶属函数 $\mu_Y(y_t|u_t)$ 表示其特征。

输出 Y^t 与之对应． 又，若给模糊系统 A 的输入是模糊的时候，即用 U 中的模糊集 U^t 给出时，则对应的模糊输出 Y^t 用式(8) 给出，Y^t 的隶属函数由 (7) 式给出．

例 下面举一个无记忆模糊系统的简单例子．我们设输入及输出集合分别为 $U=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2,3\}$．并设，若输入为 $u_t=1$，则对应的模糊输出为模糊集"y_t 近似地等于 1"．同样地，若 $u_t=2$，则 y_t 近似地等于 2． 若 $u_t=3$，则 y_t 近似地等于 3．这样一来，可用隶属函数 $\mu_Y(y_t|u_t)$ 表示如下

$$\mu_Y(1|1)=1;\quad \mu_Y(2|1)=0.3;\quad \mu_Y(3|1)=0.1$$
$$\mu_Y(1|2)=0.2;\quad \mu_Y(2|2)=1;\quad \mu_Y(3|2)=0.2$$
$$\mu_Y(1|3)=0.1;\quad \mu_Y(2|3)=0.2;\quad \mu_Y(3|3)=1$$

其次，我们设输入是用模糊集 "u_t近似等于 1" 表示的模糊输入，我们用如下的隶属函数表示其特征．

$$\mu_U(1)=1;\quad \mu_U(2)=0.2;\quad \mu_U(3)=0.1$$

这样，使用式 (7)，对于模糊输入 $\underset{\sim}{1}$ 的输出是模糊输出 $\underset{\sim}{1}$，它是用如下的隶属函数表示其特征的[1]．

$$\mu_Y(1)=1;\quad \mu_Y(2)=0.3;\quad \mu_Y(3)=0.2$$

图 1 表示模糊输入与模糊输出的关系．若使用模糊向量与模糊矩阵的乘积的公式，则可简单地求得它的输出．即若对应于模糊输入 $\underset{\sim}{1}$ 的隶属度用向量



图 1 模糊输入输出关系

---

1) $\underset{\sim}{1}$ 这种表示方式是表示"近似地等于 1" 的实数的模糊集．

$$[1, 0.2, 0.1]$$

表示，而 $\mu_Y(y_t|u_t)$ 用模糊矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

表示，则把这个向量与矩阵乘起来就可求得模糊输出. 对于模糊输出 $\underset{\sim}{1}$ 的隶属度可求得如下

$$\begin{aligned} &[1, 0.2, 0.1]\circ\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [(1\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.2)\vee(0.1\wedge 0.1), \\ &\quad (1\wedge 0.3)\vee(0.2\wedge 1)\vee(0.1\wedge 0.2), \\ &\quad (1\wedge 0.1)\vee(0.2\wedge 0.2)\vee(0.1\wedge 1)] \\ &= [1\vee 0.2\vee 0.1, 0.3\vee 0.2\vee 0.1, 0.1\vee 0.2\vee 0.1] \\ &= [1, 0.3, 0.2] \end{aligned}$$

式(8)表示从 U 中模糊集（模糊输入）到 Y 中模糊集（模糊输出)的变换. 比如在上例中是 $G_0(\underset{\sim}{1}) = \underset{\sim}{1}$. 在实际中兴趣较多的情况是变换 G_0 能用有限个甚至很少几个的模糊输入输出对 $\{(U^t, Y^t)\}$ 表现. 比如，可给出如表 1 的模糊输入输出对近似地表现 G_0. 这里 $\underset{\sim}{x}(x\in R)$ 表示近似地等于 x 的实数的模糊集.

这样，式(7)，(8)完全达到了把无记忆模糊系统（近似地)附以特征的目的.

上面，我们阐述了“无记忆的”模糊系统. 现在，我们将对“有记忆的”模糊系统进行说明.

首先，我们考虑用如下的状态方程表示其特征的系统 A.

$$X^{t+1} = F(x_t, u_t) \tag{9}$$

$$Y^t = G(x_t, u_t) \tag{10}$$

表 1　模糊输入输出的例子

U^t	Y^t
$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{1}$
$\underset{\sim}{1.1}$	$\underset{\sim}{1.3}$
$\underset{\sim}{1.2}$	$\underset{\sim}{1.6}$
$\underset{\sim}{1.3}$	$\underset{\sim}{2}$
$\underset{\sim}{1.4}$	$\underset{\sim}{2.5}$
$\underset{\sim}{1.5}$	$\underset{\sim}{2.9}$
$\underset{\sim}{1.6}$	$\underset{\sim}{2.5}$
$\underset{\sim}{1.7}$	$\underset{\sim}{2.1}$
$\underset{\sim}{1.8}$	$\underset{\sim}{1.8}$
$\underset{\sim}{1.9}$	$\underset{\sim}{1.6}$
$\underset{\sim}{2}$	$\underset{\sim}{1.5}$
$\underset{\sim}{2.1}$	$\underset{\sim}{1.5}$
⋮	⋮
$\underset{\sim}{3}$	$\underset{\sim}{1.5}$

其中 x_t，u_t 分别表示在时刻 t 的状态和输入，而函数 F 是从直积 $X \times U$ 到 X 中模糊集族的映射，函数 G 是从 $X \times U$ 到 Y 中模糊集族的映射. X，U，Y 分别表示状态空间，输入空间，输出空间.

因此，(9) 式，(10) 式左边的 X^{t+1}，Y^t 分别为 X，Y 中的模糊集，详细地说，就是以状态 x_t，输入 u_t 为条件的 X，Y 中的条件模糊集. 所以，X^{t+1} 和 Y^t 分别表示时刻 $t+1$ 及时刻 t 系统 A 的**模糊状态**，**模糊输出**，它们分别用条件隶属函数 $\mu_X(x_{t+1}|x_t, u_t)$，$\mu_Y(y_t|x_t, u_t)$ 表示其特征.

可是，(9) 式，(10)式分别是对应于时刻 t 的非模糊状态 x_t，非模糊输入 u_t，表示时刻 $t+1$ 的模糊状态 X^{t+1} 及时刻 t 的模糊输出 Y^t 的特征的. 与上面叙述的“无记忆的”系统的情况同样，将这些式子推广，可导出时刻 t 的状态为模糊，或者

输入为模糊，或者状态、输入两者都为模糊的状态方程．

首先，从状态为模糊的情形开始，设时刻 t 的状态是用隶属函数 $\mu_X(x_t)$ 表示其特征的．这样，根据式(6)，将(9)，(10)式作如下推广．

$$\mu_X(x_{t+1}) = \bigvee_{x_t} [\mu_X(x_t) \wedge \mu_X(x_{t+1} | x_t, u_t)] \tag{11}$$

$$\mu_Y(y_t) = \bigvee_{x_t} [\mu_X(x_t) \wedge \mu_Y(y_t | x_t, u_t)] \tag{12}$$

我们用简单记号将这些式子表示如下

$$X^{t+1} = F_0(X^t, u_t) \tag{13}$$

$$Y^t = G_0(X^t, u_t) \tag{14}$$

如果 n 次递归地使用式(13)，(14)，则可用 X^t 及 u_t，$u_{t+1}, \cdots, u_{t+n}$ 求得 X^{t+n+1}，Y^{t+n}．比如，$n=1$ 时有

$$X^{t+2} = F_0(F_0(X^t, u_t), u_{t+1}) \tag{15}$$

$$Y^{t+1} = G_0(F_0(X^t, u_t), u_{t+1}) \tag{16}$$

简单地将它们表示为

$$X^{t+2} = F_1(X^t, u_t, u_{t+1}) \tag{17}$$

$$Y^{t+1} = G_1(X^t, u_t, u_{t+1}) \tag{18}$$

如果用隶属函数表述它们时，就是下面这样．先把(11)，(12)式中的足码 t 换成 $t+1$ 而得下式．这里，我们省略了隶属函数的足码 X，Y．

$$\mu(x_{t+2}) = \bigvee_{x_{t+1}} [\mu(x_{t+1}) \wedge \mu(x_{t+2} | x_{t+1}, u_{t+1})] \tag{19}$$

$$\mu(y_{t+1}) = \bigvee_{x_{t+1}} [\mu(x_{t+1}) \wedge \mu(y_{t+1} | x_{t+1}, u_{t+1})] \tag{20}$$

由此，把(11)式的 $\mu(x_{t+1})$ 代入上式便得

$$\mu(x_{t+2})$$
$$= \bigvee_{x_{t+1}} \Big[\bigvee_{x_t} [\mu(x_t) \wedge \mu(x_{t+1} | x_t, u_t)] \wedge$$

$$\mu(x_{t+2}|x_{t+1}, u_{t+1})\Big] \quad (21)$$

$$\mu(y_{t+1})$$

$$= \bigvee_{x_{t+1}}\Big[\bigvee_{x_t}[\mu(x_t)\wedge\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)]\wedge$$

$$\mu(y_{t+1}|x_{t+1}, u_{t+1})\Big] \quad (22)$$

再根据运算∨，∧的分配性，则上式变成

$$\mu(x_{t+2})$$

$$= \bigvee_{x_{t+1}}\bigvee_{x_t}[\mu(x_t)\wedge\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)\wedge$$

$$\mu(x_{t+2}|x_{t+1}, u_{t+1})] \quad (23)$$

$$\mu(y_{t+1})$$

$$= \bigvee_{x_{t+1}}\bigvee_{x_t}[\mu(x_t)\wedge\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)\wedge$$

$$\mu(y_{t+1}|x_{t+1}, u_{t+1})] \quad (24)$$

同样，当 $n = 2, 3, \cdots$ 时也可递归地导出下式

$$\mu(x_{t+n+1})$$

$$= \bigvee_{x_{t+n}}\cdots\bigvee_{x_t}[\mu(x_t)\wedge\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)\wedge\cdots$$

$$\wedge\mu(x_{t+n+1}|x_{t+n}, u_{t+n})] \quad (25)$$

$$\mu(y_{t+n})$$

$$= \bigvee_{x_{t+n}}\cdots\vee[\mu(x_t)\wedge\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)\wedge\cdots$$

$$\wedge\mu(y_{t+n}|x_{t+n}, u_{t+n})] \quad (26)$$

值得注意的是，这些关系与概率系统的情形形式上类似．即，若把隶属函数换成概率函数，把运算∨及∧分别换成普通的和及积，就得到概率系统中的状态方程．

用上式表示有点复杂，如用矩阵表示则比较简单．不过，

我们设状态集合 X、输入集合 U、输出集合 Y 都是有限的。于是,比如若设 $X=\{x^1, x^2, \cdots x^m\}$, 则对于每个 $u_t \in U$, 我们来定义其元素是用下式表示的 $m \times m$ 模糊矩阵 $M(u_t) = [M_{ij}(u_t)]$. 即,若设

$$M_{ij}(u_t) = \mu(x^i | x^j, u_t)$$

则详细写这个矩阵就是

$$M(u_t) = \begin{bmatrix} \mu(x^1|x^1, u_t), & \mu(x^1|x^2, u_t), \cdots \mu(x^1|x^m, u_t) \\ \mu(x^2|x^1, u_t), & \mu(x^2|x^2, u_t), \cdots \mu(x^2|x^m, u_t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu(x^m|x^1, u_t), & \mu(x^m|x^2, u_t), \cdots \mu(x^m|x^m, u_t) \end{bmatrix}$$

并设 $\bar{X}_t$ 是列向量,它的第 i 个元素是 $\mu(x_t)$ 在 x_t^i 时的值,表示如下

$$\bar{x}_t = [\mu(x_t^1), \ \mu(x_t^2), \ \cdots, \ \mu(x_t^m)]'$$

同样,还可定义时刻 $t+1$ 的列模糊向量 $\bar{x}_{t+1}$。若再设输出集合 Y 为 $\{y^1, y^2, \cdots, y^k\}$, 用与定义 $M(u_t)$ 同样的方法,还可定义如下的 $k \times m$ 模糊矩阵 $M_Y(u_t)$.

$$M_Y(u_t) = \begin{bmatrix} \mu(y^1|x^1, u_t), & \mu(y^1|x^2, u_t), \cdots, \mu(y^1|x^m, u_t) \\ \mu(y^2|x^1, u_t), & \mu(y^2|x^2, u_t), \cdots, \mu(y^2|x^m, u_t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu(y^k|x^1, u_t), & \mu(y^k|x^2, u_t), \cdots \mu(y^k|x^m, u_t) \end{bmatrix}$$

与定义 $\bar{x}_t$ 同样,还可定义如下的 k 维列模糊向量

$$\bar{y}_t = [\mu(y_t^1), \ \mu(y_t^2), \cdots, \ \mu(y_t^k)]'$$

使用这些模糊矩阵及模糊向量,则 (11), (12) 式可表示为[1)]

$$\bar{x}_{t+1} = \mathrm{M}(u_t) \circ \bar{x}_t \tag{27}$$

---

1) 一般地,设模糊矩阵为 A, B, C, 则运算 ○ 如下定义

$$C = A \circ B \Leftrightarrow c_{ij} = \bigvee_k [a_{ik} \wedge b_{kj}]$$

$$\bar{y}_t = M_Y(u_t)\circ\bar{x}_t \tag{28}$$

更一般地，对于 $n=1, 2, \cdots$ 有

$$\bar{x}_{t+n+1} = M(u_{t+n})\circ\cdots\circ M(u_t)\circ\bar{x}_t \tag{29}$$

$$\bar{y}_{t+n} = M_Y(u_{t+n})\circ M(u_{t+n-1})\circ\cdots\circ M(u_t)\circ\bar{x}_t \tag{30}$$

(参考(25)，(26)式)。

下面举一个模糊系统的简单例子。

例 把某人看作是模糊系统．设该人的状态为"严重感冒"，设输入为"吃了好的感冒药"，则作为输出就是"热稍退"，而下一个状态就是"感冒稍好"．这些状态、输入、输出都是模糊的。现在，我们用模糊系统对此进行模拟．为了说起来简单，不考虑输出，而且设感冒的症状(状态)为$\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$四个。这里设 x^1 表示最轻症状的状态，x^2，x^3 表示依次加重症状的状态，x^4 表示最重症状的状态．我们所说的"严重感冒"状态是模糊的，比如，可假定是按 0.9，0.5，0.1，0 的程度分配给 x^4，x^3，x^2，x^1 的。我们用列向量

$$\begin{matrix} & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x_t = [& 0, & 0.1, & 0.5, & 0.9]' \end{matrix}$$

表示．这表示该人的感冒症状最接近于症状 x^4．下面，我们考虑模糊矩阵 $M(u_t)$．假定作为输入的感冒药是 $u_t = a$，b 两种，而且 a 是比 b 更好的药，则 $M(a)$，$M(b)$ 可如下给出

x_{t+1} \ x_t	x^1	x^2	x^3	x^4
x^1	0.3	0.6	0.9	0.4
x^2	0	0.3	0.6	0.9
x^3	0	0	0.3	0.6
x^4	0	0	0	0.3

$$M(a) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.9 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.6 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$
M(b)=\begin{array}{c} \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{array}
\overset{x_{t+1} \diagdown x_t \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4}{\begin{bmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.9 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}}
$$

这里，比如，$M(a)$ 中位置(1, 3)的元素 $\mu(x^1|x^3, a)=0.9$ 表示若在状态(症状) x^3 时输入 a (药)，则在下一时刻处于状态 x^1 的程度为 0.9. 另外，在矩阵中，0 值表示吃了药不能恶化。于是，吃药结果该人的下一状态(症状)"感冒稍好"可用如下的运算大致给出(参考 (27) 式).

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad\quad\; x^1 \quad\; x^2 \quad\; x^3 \quad\; x^4 \\
\tilde{x}_{t+1} &= M(a)\circ\tilde{x}_t = [0.4, 0.9, 0.6, 0.3]' \\
\tilde{x}_{t+1} &= M(b)\circ\tilde{x}_t = [0.3, 0.6, 0.9, 0.7]'
\end{aligned}
$$

按上面的结果，若吃了药 a (比 b 还好的药)，则达到近于 x^2 的状态，吃了药 b，则达到近于 x^3 的状态.

在迄今为止的分析中，都假定逐项加入的输入 $u_t, u_{t+1}, \cdots, u_{t+n}$ 不是模糊的，即是不模糊的，以此为基础，用 X^t, $u_t, \cdots, u_{t+n}$ 表示了 $X^{t+1}, \cdots, X^{t+n+1}$ 及 $Y^t, \cdots, Y^{t+n}$. 下面我们来考虑，当输入是模糊时，模糊状态 $X^{t+1}, \cdots, X^{t+n+1}$ 及模糊输出 $Y^t, \cdots, Y^{t+n}$ 用什么样的状态方程表示其特征呢?

首先，请看(9)，(10)式. 那里的 F, G 分别是从 $X\times U$ 到 X, Y 中模糊集族的映射. 那么，当时刻 t 的输入及状态都是模糊时，X^{t+1}, Y^t 的隶属函数将怎样表现呢?

先把 $X\times U=\{(x_t, u_t)\}$ 中的模糊集的隶属函数记为

$\mu(x_t, u_t)$[1]. 于是，利用式(16)，X^{t+1} 及 Y^t 的隶属函数分别表示为

$$\mu(x_{t+1}) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{u_t} [\mu(x_t, u_t) \wedge \mu(x_{t+1} | x_t, u_t)] \quad (31)$$

$$\mu(y_t) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{u_t} [\mu(x_t, u_t) \wedge \mu(y_t | x_t, u_t)] \quad (32)$$

进而，我们考虑

$$\mu(x_t, u_t) = \mu(x_t) \wedge \mu(u_t) \quad (33)$$

的特殊情形，其中 $\mu(x_t)$，$\mu(u_t)$ 分别表示时刻 t 的模糊状态 X^t、模糊输入 U^t 的隶属函数. 这时，我们说模糊集 X^t 与 U^t **没有相互作用**[2]. 这时，式(31)，(32)还原为

$$\mu(x_{t+1}) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{u_t} [\mu(x_t) \wedge \mu(u_t) \wedge \mu(x_{t+1} | x_t, u_t)] \quad (34)$$

$$\mu(y_t) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{u_t} [\mu(x_t) \wedge \mu(u_t) \wedge \mu(y_t | x_t, u_t)] \quad (35)$$

我们用记号把式(34)，(35)表示如下

$$X^{t+1} = F_{00}(X^t, U^t) \quad (36)$$

$$Y^t = G_{00}(X^t, U^t) \quad (37)$$

这里，F_{00} 及 G_{00} 分别表示从 X 中的模糊集族和 U 中的模糊集族的直积到 X 中的模糊集族及到 Y 中的模糊集族的映射. 因此，式(36)是规定了给出时刻 t 的模糊状态、模糊输入时，时刻 $t+1$ 的模糊状态的公式. 同样，式(37)是规定了给出时刻 t 的模糊状态、模糊输入时，时刻 $t+1$ 的模糊输出的公式. 另外，式(9)，(10)可分别看作是式(36)，(37)的特殊情况.

---

1) 这个隶属函数的概念相当于概率论中联合概率的概念.

2) 它对应于概率论中随机变量的独立的概念.

下面举一个输入为模糊时的简单例子．设输入及输出取两个值 $U = Y = \{0, 1\}$，而状态为 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$． 还假定隶属函数 $\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)$ 及 $\mu(y_t|x_t, u_t)$ 是用下表表示的．

表 2　$\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)$

	$u_t=0$			$u_t=1$		
x_t \ x_{t+1}	α	β	γ	α	β	γ
α	1	0.8	0.6	0.8	0.5	1
β	0.7	0.2	1	0.2	1	0.6
γ	0.3	0.3	0.4	0.9	0.7	1

表 3　$\mu(y_t|x_t, u_t)$

	$u_t=0$		$u_t=1$	
x_t \ y_t	0	1	0	1
α	0.8	0.3	0.6	0.3
β	1	0.1	0.5	1
γ	0.8	0.7	0.3	0.2

另外，设时刻 t 的模糊状态 X^t，模糊输入 U^t 是用隶属函数

$$\mu(\alpha) = 1, \quad \mu(0) = 1$$
$$\mu(\beta) = 0.8, \quad \mu(1) = 0.3$$
$$\mu(\gamma) = 0.4.$$

表示其特征的。

这样一来，利用 (34) 式，时刻 $t+1$ 的模糊状态 X^{t+1} 可用如下隶属函数表示其特征。比如，$\mu(\alpha)$ 为

$$\begin{aligned}\mu(\alpha) = & [\mu(\alpha)\wedge\mu(0)\wedge\mu(\alpha|\alpha,0)] \\ & \vee[\mu(\alpha)\wedge\mu(1)\wedge\mu(\alpha|\alpha,1)] \\ & \vee[\mu(\beta)\wedge\mu(0)\wedge\mu(\alpha|\beta,0)] \\ & \vee[\mu(\beta)\wedge\mu(1)\wedge\mu(\alpha|\beta,1)] \\ & \vee[\mu(\gamma)\wedge\mu(0)\wedge\mu(\alpha|\gamma,0)] \\ & \vee[\mu(\gamma)\wedge\mu(1)\wedge\mu(\alpha|\gamma,1)] \\ = & [1\wedge 1\wedge 1]\vee[1\wedge 0.3\wedge 0.8] \\ & \vee[0.8\wedge 1\wedge 0.7]\vee[0.8\wedge 0.3\wedge 0.2] \\ & \vee[0.4\wedge 1\wedge 0.3]\vee[0.4\wedge 0.3\wedge 0.9] \\ = & 1\vee 0.3\vee 0.7\vee 0.2\vee 0.3\vee 0.3 \\ = & 1\end{aligned}$$

同样

$$\mu(\beta) = 0.8$$

$$\mu(\gamma) = 0.8$$

又，利用式 (35)，模糊输出 Y^t 可用如下的隶属函数表示其特征。比如，

$$\begin{aligned}\mu(0) = & [\mu(\alpha)\wedge\mu(0)\wedge\mu(0|\alpha,0)] \\ & \vee[\mu(\alpha)\wedge\mu(1)\wedge\mu(0|\alpha,1)] \\ & \vee[\mu(\beta)\wedge\mu(0)\wedge\mu(0|\beta,0)] \\ & \vee[\mu(\beta)\wedge\mu(1)\wedge\mu(0|\beta,1)] \\ & \vee[\mu(\gamma)\wedge\mu(0)\wedge\mu(0|\gamma,0)] \\ & \vee[\mu(\gamma)\wedge\mu(1)\wedge\mu(0|\gamma,1)] \\ = & [1\wedge 1\wedge 0.8]\vee[1\wedge 0.3\wedge 0.6] \\ & \vee[0.8\wedge 1\wedge 1]\vee[0.8\wedge 0.3\wedge 0.5] \\ & \vee[0.4\wedge 1\wedge 0.8]\vee[0.4\wedge 0.3\wedge 0.3]\end{aligned}$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.4 \vee 0.3$$
$$= 0.8$$

同样地，有 $\mu(1) = 0.4$。

与“无记忆”的模糊系统（参考前面）的情形同样，(34)，(35)式很好地完成了给“有记忆”的模糊系统近似地附以特征的目的。比如，若设 $\underset{\sim}{x}$ 是近似等于 x 的实数所组成的模糊集，则变换 F_{00}，G_{00}（参考(36)，(37)式)能由表 4 所给出的模糊输入、模糊输出、模糊状态近似地表现出来。 比如，由所给的表，可如下表示。

$$\underset{\sim}{2} = F_{00}(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{0})$$
$$\underset{\sim}{0} = G_{00}(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{0})$$

表 4　模糊转移函数 $X^{t+1} = F_{00}(X^t, U^t)$

U^t \ X^t	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{2}$	$\underset{\sim}{3}$	$\underset{\sim}{4}$
$\underset{\sim}{0}$	$\underset{\sim}{2}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{4}$	$\underset{\sim}{3}$
$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{3}$	$\underset{\sim}{4}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{2}$

表 5　模糊输出函数 $Y^t = G_{00}(X^t, U^t)$

U^t \ X^t	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{2}$	$\underset{\sim}{3}$	4
$\underset{\sim}{0}$	$\underset{\sim}{0}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{0}$
$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{0}$	$\underset{\sim}{1}$	$\underset{\sim}{1}$

下面，我们来考虑把模糊输入逐次加到系统中去的情形。为了简单，设模糊输入 $U^t, U^{t+1}, \cdots, U^{t+n}, n \geqslant 1$ 没有相互作

用，即

$$\mu(u_t, \cdots, u_{t+n}) = \mu(u_t) \wedge \mu(u_{t+1}) \wedge \cdots \wedge \mu(u_{t+n}) \quad (38)$$

当 $n = 1$ 时，根据(34)，(35)式，则得

$$\mu(x_{t+2}) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{x_{t+1}} \bigvee_{u_t} \bigvee_{u_{t+1}} [\mu(x_t) \wedge \mu(x_{t+1} | x_t, u_t) \wedge \mu(x_{t+2} | x_{t+1}, u_{t+1}) \wedge \mu(u_t) \wedge \mu(u_{t+1})] \quad (39)$$

$$\mu(y_{t+1}) = \bigvee_{x_t} \bigvee_{x_{t+1}} \bigvee_{u_t} \bigvee_{u_{t+1}} [\mu(x_t) \wedge \mu(x_{t+1} | x_t, u_t) \wedge \mu(y_{t+1} | x_{t+1}, u_{t+1}) \wedge \mu(u_t) \wedge \mu(u_{t+1})] \quad (40)$$

用上式能够计算没有相互作用的模糊输入逐次被加入时的模糊状态及模糊输出.

§2. 基于模糊系统的学习控制

现在，作为模糊系统的一个应用例子，我们来叙述基于模糊系统的学习控制. 迄今为止所讲的模糊系统中的状态转移函数 $\mu_X(x_{t+1}|x_t, u_t)$ 及输出函数 $\mu_Y(y_t|x_t, u_t)$ 在时间上没有变化，就是说是固定的，下面将说明，由于适当地变化这些函数(即，使它学习)能够使模糊系统有学习的机能. 已经说过，模糊系统包含确定性系统及非确定性系统，而且有与概率系统相似的性质. 关于这些内容可参考下一节的“系统的一般定义”. 过去一提学习系统主要就是研究基于概率系统的学习系统，可是作为学习系统的模糊系统，即使与概率系统相比，也可举出容易设计、容易计算等等的优点. 而且模拟结果也是相当好的. 作为学习系统的概率系统及模糊系统各有长处和短处，关于两者的对比，现在不作讨论.

考虑用模糊系统控制离散概率设备的联机学习控制器，我们来叙述为了设计这种控制器所需要的算法，并说明计算

机实验的结果.

图 2 给出了基于模糊系统的学习控制系统的框图. 设离散概率设备是用下式记述的.

$$v_{t+1} = \varphi_{t+1}(v_t, y_{t+1}) \tag{41}$$

其中

$$v_t, v_{t+1} \in V = \{v^i | i = 1, 2, \cdots, p\}$$
$$y_t \in Y = \{y^i | i = 1, 2, \cdots, k\}$$

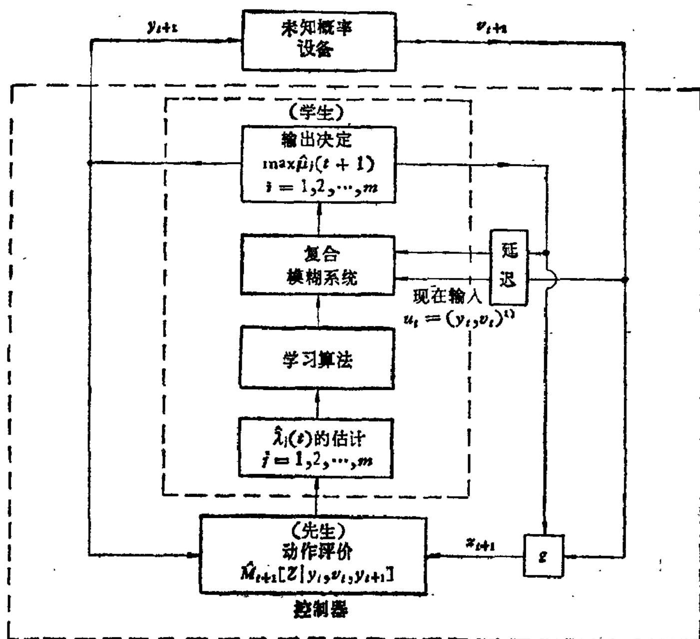


图 2　基于模糊系统的学习控制系统

设，若来自设备的输出 v 是连续的情形，则给予模糊系统的输入 $u=(y,v')$ 中的v' 是将 v 适当地量子化而得到的.

v_{t+1} 是把来自模糊系统的(控制)输出 y_{t+1} 加到设备以后，$t+1$ 时设备的反应. 这里，函数 $\phi_t(t=1, 2, \cdots)$ 是未知

的．一般来说，作为设备的反应，按设备的性质，取连续值或离散值，而在取连续值时，可以用分割为适当区间的办法改变为离散值．

假设，对于控制输出 y_t，设备的瞬时动作评价是如下给出的．

$$z_{t+1} = g(v_t, y_{t+1}, v_{t+1}) \tag{42}$$

这里

$$0 < z_t < T < \infty$$

假设，控制的目的是使 z 的样本平均 $\hat{M}_{t+1}(z|y_t, v_t, y_{t+1})$ 为最小．这里 z 的样本平均像下面这样求．若设时刻 t 的事件 $y_t = y^j$, $v_t = x^i$ 被观测后，把控制输出 $y_{t+1} = y^l$ 加到设备中去，则 z 的样本平均用

$$\begin{aligned}&\hat{M}_{t+1}(z|y^j, v^i, y^l)\\&= \frac{N}{N+1}\hat{M}_t(z|y^j, v^i, y^l) + \frac{z_{t+1}}{N+1}\end{aligned} \tag{43-1}$$

给出．另外，假设对于所有的 $y^h(\neq y^l)$，样本平均不变，就是

$$\hat{M}_{t+1}(z|y^j, v^i, y^h) = \hat{M}_t(z|y^j, v^i, y^h) \tag{43-2}$$

其中，$N = N(j, i, l)$ 表示到时刻 t 为止 3 元事件 y^j, v^i, y^l 出现的次数．

下面，我们来叙述对于模糊系统的学习算法．这里，作为我们研究对象的模糊系统是有记忆的模糊系统，而输入是非模糊的，也就是说，状态转移是用式(11)

$$\begin{aligned}\mu_X(x_{t+1}) &= \bigvee_{x_t}[\mu_X(x_t)\wedge\mu_X(x_{t+1}|x_t, u_t)]\\&= \max_{x_t}\min[\mu_X(x_t), \mu_X(x_{t+1}|x_t, u_t)]\end{aligned} \tag{44}$$

给出的．我们就这种情形进行叙述．其中，设

$$x_t, x_{t+1} \in X = \{x^i | i = 1, 2, \cdots, m\} \quad (状态集合)$$

$$u_t \in U = \{u^i | i = 1, 2, \cdots, n\} \ (输入集合) \tag{45}$$

并设关于输出是状态输出型[1]。即假设对于状态 x^i 有唯一的（控制）输出 $y^i \in Y = \{y^i | i = 1, 2, \cdots, k\}$（输出集合）与之对应。

我们假设，若 $\hat{\mu}_i(t)$[2] 表示时刻 t 时模糊系统在状态 x^i 的隶属度，则对各时刻 $t = 1, 2, \cdots$ 的设备的最佳控制输出规定为，与具有最大隶属度的状态相对应的输出，也就是与隶属度为

$$\mu_{i^*} = \max_{i=1,\cdots,m} \hat{\mu}_i(t) \tag{46}$$

的状态 x^{i*} 相对应的输出 y^{i*} 为时刻 t 的最佳控制输出。其中 m 是状态数，$i^* \in \{1, 2, \cdots, m\}$。

现在把模糊系统的状态转移函数换成下面的记法。

$$\mu_{ij}^l(t) \triangleq \mu_X(x_{t+1} = x^j | x_t = x^i, u_t = u^l) \tag{47}$$

其中，x^j，x^i 表示模糊系统的状态，u^l 表示模糊系统的输入。

于是，模糊系统在时刻 $t+1$ 状态的隶属度，可以用时刻 t 状态的隶属度与状态转移函数如下给出（参考式(44)）。

$$\hat{\mu}_j(t+1) = \max_i \min[\hat{\mu}_i(t), \mu_{ij}^l(t)] \tag{48}$$

其中，$i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$l \in \{1, 2, \cdots, n\}$。即 $x^i, x^j \in \{x^1, x^2, \cdots, x^m\}$（状态集合），$u^l \in \{u^1, u^2, \cdots, u^n\}$（输入集合）（参考式(45)）。

另外，这里把设备的事件 (y_t, v_t) 作为给予模糊系统的输入 u_t。

现在，我们来叙述基于模糊系统的学习控制的学习算法，

---

1) 一般来说，在模糊系统中，输出函数可定义为 $\mu_Y(y_t | x_t, u_t) \in [0, 1]$ (Mealy 型)或 $\mu_Y(y_t | x_t) \in [0, 1]$ (Moore 型)，现在，这里是 Moore 型的特殊情形。

2) 在式(44)的 $\mu_X(x_t)$ 中，当 $x_t = x^i$ 时，简单地表示为 $\hat{\mu}_i(t)$。

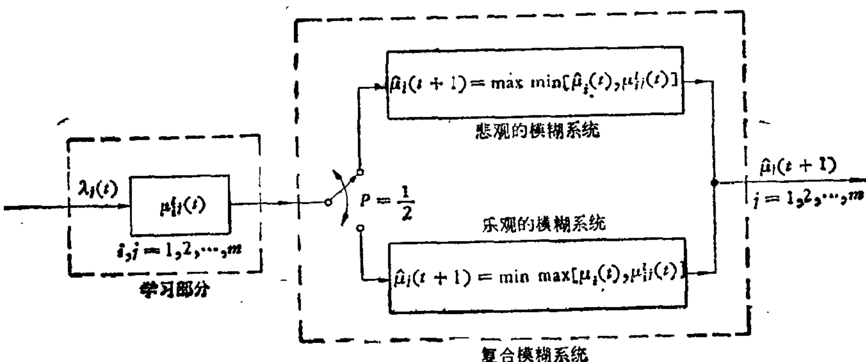


图3　学习机构

而且根据收敛性等概念引进**复合模糊系统**(图 3)。迄今为止所叙述的模糊系统，即状态的隶属度 $\hat{\mu}_j(t+1)$ 如式(48)那样用运算 max min 给出的模糊系统，特给它起名为**悲观的模糊系统**，而如下式(49)那样用运算 min max 给出状态隶属度的模糊系统称为**乐观的模糊系统**[1]

$$\hat{\mu}_j(t+1) = \min_i \max[\hat{\mu}_i(t), \mu^l_{ij}(t)] \tag{49}$$

复合模糊系统的结构用图 3 表示。把式(48)及式(49)，也就是下面的式(50)及式(51)以 1/2 的概率交替运用，可以给出复合模糊系统的状态隶属度。

$$\hat{\mu}_j(t+1) = \max_i \min[\hat{\mu}_i(t), \mu^l_{ij}(t)] \tag{50}$$

$$\hat{\mu}_{j(t+1)} = \min_i \max[\hat{\mu}_i(t), \mu^l_{ij}(t)] \tag{51}$$

为什么采用了复合模糊系统呢？因为若只用一个模糊系统(即，乐观的或悲观的模糊系统中的一个)，则收敛定理不一定常成立。比如，就悲观的模糊系统(式(48))来说，作为极端的情形，若设对一切 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$，时刻 $t = 1$ 的状态

---

1) 详细内容请参考下一节"系统的一般定义"。

隶属度为 $\hat{\mu}_i(1)=0$，则根据式(48)，当 $t=2$ 时的状态隶属度 $\mu_j(2)$ 对一切的 $j=1,2,\cdots,m$ 有 $\hat{\mu}_j(2)=0$. 即

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_j(2) &= \max_i \min[\hat{\mu}_i(1),\ \mu^l_{ij}(1)] \\ &= \max_i \min[0,\ \mu^l_{ij}(1)] \\ &= 0\end{aligned}$$

同样，当 $t=3,4,\cdots$ 时，也有 $\hat{\mu}_j(3)=\hat{\mu}_j(4)=\cdots=0$，而没有意义.

为简单起见，基于复合模糊系统的学习这样进行，即采用以如下的线性插值法为基础的学习方式对状态转移隶属度进行修正.

$$\mu^l_{ij}(t)=\begin{cases}\mu^l_{ij}(t-1) & i\neq j\\ \alpha_j\mu^l_{jj}(t-1)+(1-\alpha_j)\hat{\lambda}_j(t) & i=j\end{cases} \tag{52}$$

这里，$0<\alpha_j<1$，$0\leqslant\hat{\lambda}_j(t)\leqslant 1$，$j=1,2,\cdots,m$

作为估计值 $\hat{\lambda}_j(t)$ 为

$$\hat{\lambda}_j(t)=1-\frac{\hat{M}_t[z\,|\,y^l,\ v^i,\ y^j]}{M} \tag{53}$$

其中，$y^l=y_{t+1}$，$v^i=v_{t-1}$，$y^j=y_t$，而 M 满足下式

$$M\geqslant \max_{l,i,j,t}\hat{M}_t[z\,|\,y^l,\ v^i,\ y^j] \tag{54}$$

还有，复合模糊自动机，或者没有初始信息，即对所有的 j 以 $\hat{\mu}_j(1)=0$ 或 1 开始，或者是以初始信息 $\hat{\mu}_j(1)=\hat{\lambda}_j(1)$，$0\leqslant\lambda_j(1)\leqslant 1$ 开始.

模拟结果

在进行计算机模拟时，要作如下的假设. 设概率设备的输出 v 取区间 [1.5, 6.5] 的连续值，为了简单，设 (57) 式的动作评价 j 为 $z_i=v_i$. 又，设给予设备的输入(即模糊系统的输出)为 $y^1=1$，$y^2=2$，$y^3=3$ 三种，而对于每个的最佳动作函数 $M(z\,|\,y^i)$，$i=1,2,3$ 的值由表 6 给出. 这里，设

备 $M(z|y^i)$ 作为中心具有如下均匀分布的杂音.

$$p(z|y^i)=\begin{cases}\frac{1}{s}, & -\frac{s}{2}+M(z|y^i)<z<\frac{s}{2}+M(z|y^i)\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases} \tag{55}$$

另外,设在实验中 $s=3.0$.

还假设,设备的输出区间 [1.5, 6.5] 被 5 等分,给予模糊系统的输入 $u=(y, v')$ 为 3×5=15 种. 动作量 z 的累积样本平均如下给出.

$$I(k)=\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}z_t \tag{56}$$

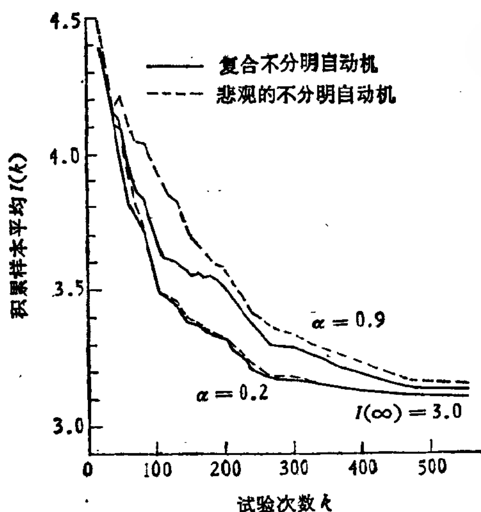


图 4 模拟结果

图 4 表示对步数的累积样本平均. 实线部分是用复合模糊系统的情形. 虚线部分是用悲观模糊系统的情形. 在线性插值法中的参数 α, 是就 $\alpha=0.2$ 和 $\alpha=0.9$ 两种情形进行的.

表 6

$y^i:i$	1	2	3
$M(x\|y^i)$	3.0	4.0	5.0

§3. 系统的一般定义

模糊系统包含决定性系统及非决定性系统这两种特殊情形，而且还具有与概率系统很相似的性质。现在，我们抽出这些系统的共同性质，给出系统的一般定义，并导出各种系统。

定义 暂定的系统 A 用如下的 6 元总体表示

$$A = (X, Y, S, f, g, h) \tag{57}$$

这里

1° X：输入记号的有限集

2° Y：输出记号的有限集

3° S：内部状态的有限集

4° f：是使得 $S \times X \times S \times T \to [0,1]$ 的函数，这里 T 表示时间轴。即，对各个 $s \in S$，$x \in X$，$t \in T$ 有 $f(s, x, s, t) \in [0, 1]$。f 称为时刻 t 的**状态转移函数**。

5° g：是使得 $S \times X \times Y \times T \to [0, 1]$ 的函数，称为**输出函数**。

6° h：是使得 $S \times T \to [0, 1]$ 的函数，称为**初始状态指定函数**。

若 $T = N$（自然数的集合），则称系统 A 是**离散的**，若 f，g，h 与 T 独立，即与时间无关，则称 A 是**平稳的**。

X，Y 中的元素分别称为输入记号，输出记号，而输入

(输出)记号的有限序列称为输入(输出)序列. 为了方便，引进空序列 Λ，设它对于各序列 z 满足 $z\Lambda = \Lambda z = z$. 设所有的输入(输出)序列的集合用 $X^*(Y^*)$ 表示，而用 $\lg(z)$ 表示序列 z 的长.

定义 规定系统 A^*，

$$A^* = (X, Y, S, f^*, g^*, h) \tag{58}$$

这里，X，Y，S，h 和前面一样，而 f^*，g^* 分别为如下定义的函数.

$$f^*: S \times X^* \times S \times T \to [0, 1] \tag{59}$$

$$g^*: S \times X^* \times Y^* \times T \to [0, 1] \tag{60}$$

那么，对函数 f，g，h 规定某个约束条件(用 C 表示)，再规定在约束 C 的基础上由 f，g 递归地得到 f^*，g^* 的扩张规则(用 R 表示)，便能够定义各种系统. 我们说用 C 与 R 由暂定的系统 A 所规定的系统 A^* 属于类 $\mathscr{C}(C, R)$.

I 概率系统 $\mathscr{C}(C_P, R_P)$

(a) 约束 C_P：对于各 $s \in S$，$x \in X$，$t \in T$，有

$$\sum_{s' \in S} f(s, x, s', t) = 1$$

$$\sum_{y \in Y} g(s, x, y, t) = 1$$

$$\sum_{s \in S} h(s', t) = 1$$

(b) 扩张规则 R_P：f^*，g^* 被递归地定义在 $\lg(x^*)$，$x^* \in X^*$ 上

(i)

$$f^*(s, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 1, & s = s' \\ 0, & s \neq s' \end{cases}$$

$f^*(s, x^*x, s', t)$

$$= \sum_{s \in S} f^*(s, x^*, s'', t) \cdot f(s'', x, s', t + \lg(x^*))$$

(ii) $g^*(s, x^*, y^*, t) = 0$，若$\lg(x^*) \neq \lg(y^*)$

$g^*(s, \Lambda, \Lambda, t) = 1$

$g^*(s, x^*x, y^*y, t) = g^*(s, x^*, y^*, t)$

$$\times \sum_{s \in S} f^*(s, x^*, s', t) \cdot g(s', x, y, t + \lg(x^*)).$$

II　确定性系统 $\mathscr{C}(C_D, R_D)$

(a) 约束 C_D: 在约束 C_P 之外 f, g, h 的值域是 $[0, 1]$。

(b) 扩张规则 R_D: $R_D = R_P$。

III　悲观的模糊系统 $\mathscr{C}(C_F, R_F)$

(a) 约束 C_F: 没有限制。

(b) 扩张规则 R_F:

(i)
$$f^*(s, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 1, & s = s' \\ 0, & s \neq s' \end{cases}$$

$f^*(s, x^*x, s', t)$

$$= \max_{s'' \in S} \min[f^*(s, x^*, s'', t), f(s'', x, s', t + \lg(x^*))]$$

(ii) $g^*(s, x^*, y^*, t) = 0$，若 $\lg(x^*) \neq \lg(y^*)$

$g^*(s, \Lambda, \Lambda, t) = 1$

$g^*(s, x^*x, y^*y, t) = \min\{g^*(s, x^*, y^*, t),$

$\max_{s \in S} \min[f^*(s, x^*, s', t), g(s', x, y, t + \lg(x^*))]\}$

IV　非确定性系统 $\mathscr{C}(C_N, R_N)$

(a) 约束 C_N: f, g, h 的值域是 $[0; 1]$。

(b) 扩张规则 R_N: $R_N = R_F$

V　随机系统 $\mathscr{C}(C_S, R_S)$

(a) 约束 C_S: $C_S = C_F$

(b) 扩张规则 R_S: 定义如下的函数 p^*。

$$p^*(s, x^*, y^*, s', t) = 0, \text{ 若 } \lg(x^*) \neq \lg(y^*)$$

$$p^*(s, \Lambda, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 1, & s = s' \\ 0, & s \neq s' \end{cases}$$

$$p^*(s, x^*x, y^*y, s', t)$$

$$= \sum_{s'' \in S} p^*(s, x^*, y^*, s'', t) \cdot p(s'', x, y, s', t + \lg(x^*))$$

这里

$$p(s, x, y, s', t) = f(s, x, s', t) \cdot g(s, x, y, t)$$

于是，f^*，g^* 可如下给出。

$$f^*(s, x^*, s', t) = \sum_{y^* \in Y} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

$$g^*(s, x^*, y^*, t) = \sum_{s \in S} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

并且对于 $x \in X$，$y \in Y$，有

$$f^*(s, x, s', t) = f(s, x, s', t)$$

$$g^*(s, x, y, t) = g(s, x, y, t)$$

VI　乐观的模糊系统 $\mathscr{C}(C_O, R_O)$

(a) 约束 C_O：没有约束

(b) 扩张规则 R_O：

(i)

$$f^*(s, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 0, & s = s' \\ 1, & s \neq s' \end{cases}$$

$$f^*(s, x^*x, s', t)$$

$$= \min_{s'' \in S} \max[f^*(s, x^*, s'', t), f(s'', x, s', t + \lg(x^*))]$$

(ii) $g^*(s, x^*, y^*, t) = 0$，若 $\lg(x^*) = \lg(y^*)$

$$g^*(s, x^*x, y^*y, t) = \max\{g^*(s, x^*, y^*, t)$$

$$\min_{s' \in S} \max[f^*(s, x^*, s', t) \cdot g(s', x, y, t + \lg(x^*))]\}$$

VII　混合模糊系统 $\mathscr{C}(C_M, R_M)$

(a) 约束 C_M：没有约束。

(b) 扩张规则 R_M:

$$f_M^* = af_F^* + bf_O^*$$
$$g_M^* = cg_F^* + dg_O^*$$

这里，a, b, c, d 是满足 $a+b+c+d=1$ 的实数，而足码 M，F，O 分别是对应于 $\mathscr{C}(C_M, R_M)$，$\mathscr{C}(C_F, R_F)$，$\mathscr{C}(C_O, R_O)$ 的函数 f，g 的足码.

VIII 极大极小系统 $\mathscr{C}(C_A, R_A)$

(a) 约束 C_A：对于各 $s \in S$，$x \in X$，$t \in T$ 满足

$$f(s, x, s', t) = 1$$
$$g(s, x, y, t) = 1$$
$$h(s'', t) = 1$$

的 $s', s'' \in S$，$y \in Y$ 存在.

(b) 扩张规则 R_A：定义如下的函数 p^*

$$p^*(s, x^*, y^*, s', t) = 0, \quad 若 \ \lg(x^*) \neq \lg(y^*)$$

$$p^*(s, \Lambda, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 1, & s = s' \\ 0, & s \neq s' \end{cases}$$

$$p^*(s, x^*x, y^*y, s', t)$$
$$= \max_{s'' \in S} \min[p^*(s, x^*, y^*, s'', t),$$
$$p(s'', x, y, s', t + \lg(x^*))]$$

这里

$$p(s, x, y, s', t) = \min[f(s, x, s', t), g(s, x, y, t)]$$

于是，f^*，g^* 可如下给出.

$$f^*(s, x^*, s', t) = \max_{y^* \in Y} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$
$$g^*(s, x^*, y^*, t) = \max_{s \in S} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

并且对于 $x \in X$，$y \in Y$，有

$$f^*(s, x, s', t) = f(s, x, s', t)$$
$$g^*(s, x, y, t) = g(s, x, y, t)$$

IX 极小极大系统 $\mathscr{C}(C_I, R_I)$

(a) 约束 C_I：对于各 $s \in S$，$x \in X$，$t \in T$，满足

$$f(s, x, s', t) = 0$$

$$g(s, x, y, t) = 0$$

$$h(s'', t) = 0$$

的 $s', s'' \in S$，$y \in Y$ 存在。

(b) 扩张规则 R_I：定义函数 p^*

$$p^*(s, x^*, y^*, s', t) = 0, \text{ 若 } \lg(x^*) \neq \lg(y^*)$$

$$p^*(s, \Lambda, \Lambda, s', t) = \begin{cases} 0, & s = s' \\ 1, & s \neq s' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & p^*(s, x^*x, y^*y, s', t) \\ = & \min_{s'' \in S} \max[p^*(s, x^*, y^*, s'', t), \\ & p(s'', x, y, s', t + \lg(x^*))] \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} & p(s, x, y, s', t) \\ = & \max[f(s, x, s', t), g(s, x, y, t)] \end{aligned}$$

于是，f^*, g^* 可如下给出

$$f^*(s, x^*, s', t) = \min_{y^* \in Y^*} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

$$g^*(s, x^*, y^*, t) = \min_{s' \in S} p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

并且对于 $x \in X$，$y \in Y$，有

$$f^*(s, x, s', t) = f(s, x, s', t)$$

$$g^*(s, x, y, t) = g(s, x, y, t)$$

X 合成系统 $\mathscr{C}(C_C, R_C)$

(a) 约束 C_C：$C_C = C_A \cup C_I$

(b) 扩张规则 R_C：

$$f_C^* = af_A^* + bf_I^*$$

$$g_C^* = cg_A^* + dg_I^*$$

其中 $a+b+c+d=1$

XI　混杂系统 $\mathscr{C}(C_H,R_H)$

(a) 约束 C_H: 没有约束.

(b) 扩张规则 R_H: R_F 中的取 min 用取积代替，即

(i)　$f^*(s, \Lambda, s', t)=\begin{cases}1, & s=s'\\0, & s\neq s'\end{cases}$

$$f^*(s, x^*x, s', t)$$
$$=\max_{s'\in S}[f^*(s, x^*x, s', t)\cdot f(s'', x, s', t+\lg(x^*))]$$

(ii) $g^*(s, x^*, y^*, t)=0\cdots$若 $\lg(x^*)\neq\lg(y^*)$

$$g^*(s, \Lambda, \Lambda, t)=1$$

$$g^*(s, x^*x, y^*y, t)=g^*(s, x^*, y^*, t)$$

$$\max_{s'\in S}[f^*(s, x^*, s', t)\cdot g(s', x, y, t+\lg(x^*))]$$

XII　极大乘积系统 $\mathscr{C}(C_T, R_T)$

(a) 约束 C_T: $C_T=C_A$

(b) 扩张规则 R_T: R_A 中的取 min 用取积代替，即定义如下的函数 p^*

$$p^*(s, x^*, y^*, s', t)=0,\text{ 若 }\lg(x^*)\neq\lg(y^*)$$

$$p^*(s, \Lambda, \Lambda, s', t)=\begin{cases}1, & s=s'\\0, & s\neq s'\end{cases}$$

$$p^*(s, x^*x, y^*y, s', t)$$
$$=\max_{s''\in S}[p^*(s, x^*, y^*, s'', t)\cdot p(s, x, y, s', t+\lg(x^*))]$$

这里

$$p(s, x, y, s', t)=f(s, x, s', t)\cdot g(s, x, y, t)$$

于是，f^*, g^* 可如下给出

$$f^*(s, x^*, s', t)=\max_{y^*\in Y^*}p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

$$g^*(s, x^*, y^*, t)=\max_{s\in S}p^*(s, x^*, y^*, s', t)$$

并且对于 $x \in X$, $y \in Y$，有

$$f^*(s, x, s', t) = f(s, x, s', t)$$
$$g^*(s, x, y, t) = g(s, x, y, t)$$

XIII　固定系统 $\mathscr{C}(C_X, R_X)$

(a) 约束 C_X：没有约束。

(b) 扩张规则 R_X：

$$f^*(s, xx^*, s', t) = f(s, x, s', t)$$
$$g^*(s, xx^*, yy^*, t) = g(s, x, y, t)$$

§4. 模 糊 算 法

现在，我们来看下列语句(命令)。

(1) 若道路比较滑，就把速度减下来。

(2) 若 x 近似等于 5，就令 y 近似等于 10。

(3) 若 x 比 10 略微大一点，则把 y 略微增大一点。

(4) 若 x 大，则把 y 增加几个单位；若 x 小，则把 y 减少几个单位；若 x 不大不小，则使 y 原封不动。

请注意，这些命令不是所谓数学意义下的命令．即可以说是不分明的命令．这些不分明性来之于上列语句中的波线部分的词．虽然这些命令不是准确定义的数学命令，可是这种命令(一般来说是算法)在日常生活中是很常见的．上述的(1)是这样，其它比如“烹调法”，“疾病治疗法”，“停车法”等也都是这样．取烹调法为例来看，烹调师傅的指导是连续的模糊命令．“撒点盐”，“煮一阵”，“轻轻地炒”等等．学生对这样的命令很好地理解和实行，就作出了比较合乎要求的菜．

在这一节，我们对这种不分明定义的模糊命令，更一般地，对模糊算法的概念，用模糊集加以说明．又，由于在此以前所讲的模糊系统的概念与模糊算法的概念有密切的关系，

所以，对这种关系也简单地叙述一下.

粗略地说，模糊算法可以说是包含着模糊说明的算法，即包含着表示模糊集的名称的算法.

开始提出的4个不分明的命令，可以说是模糊算法之一种的模糊命令. 这些模糊命令可以用模糊集的隶属函数的概念准确地表示其意义. 例如，我们来考虑先前的例(2)，"若 x 近似等于5，则令 y 近似等于10"这一模糊命令. 首先，"近似等于5"这一实数组是实数轴 R^1 中的模糊集(设为 A)，同样，"近似等于10"这一实数组是 R^1 中的模糊集 B. 这样的模糊集 A，B 可分别用隶属函数 $\mu_A(x)$，$\mu_B(y)$，$x, y \in R^1$ (当然，在更一般的情况下，是根据该问题的前后关系主观确定的)准确地表示出它的特征. 比如，隶属函数 $\mu_A(x)$ 是像图5那样的. 因此，例(2)的模糊命令的意义，由于详细地写出 A，B 的隶属函数而显得很清楚. 可是，在更一般的情况下，把像例(2)那样的说明看作是用变数隶属函数 $\mu_C(x, y)$ 表示其特征的 R^2 中的二元模糊关系(设为 C)将是更好的说明，这时，可分别把模糊集 A，B 看做是模糊关系 C 投向 x 轴，y 轴的影[1).]

那么，一般地，模糊算法可看作用如下方程表示其特征的模糊系统 A

$$X^{t+1} = F(X^t, U^t) \tag{61}$$

$$U^t = H(X^t) \tag{62}$$

这里，X^t 是 A 在时刻 t 的模糊状态，U^t 是在时刻 t 的模糊输入(表示模糊命令)，又，X^{t+1} 是在模糊状态 X^t 下由于实行了模糊命令 U^t 所产生的在时刻 $t+1$ 的模糊状态. 如由式

1) $\mu_A(x) = \max\limits_y \mu_C(x, y)$，$\mu_B(y) = \max\limits_x \mu_C(x, y)$ 详细说明请参考第四章"模糊集的影响".

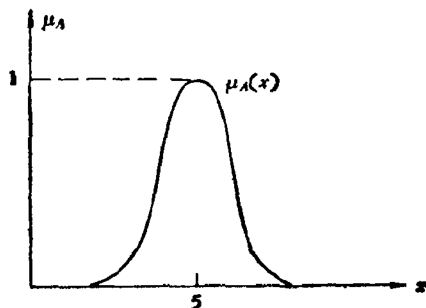


图5 “近似等于5”的模糊集的例子

(61)，(62)所知，函数F表示时刻$t+1$的模糊状态依赖于时刻t的模糊状态与模糊输入．同样，函数H表示时刻t的模糊输入依赖于时刻t的模糊状态．

现在，考虑如下的我们身边的模糊算法的例子．设给予了“如果你的感冒严重，请吃好的感冒药”这样不分明的指示(模糊命令)．这时，“感冒严重”的状态，“吃好的感冒药”的命令都是模糊的．因此，我们用模糊集合X^t表示“感冒严重”的状态(模糊状态)．于是，根据这个症状X^t，决定如何“吃好的感冒药”，即决定模糊输入U^t(用式(62))．根据这个模糊输入U^t及模糊状态X^t，决定下一个模糊状态X^{t+1}(即，感冒的症状)(用式(61))．用同样方法，根据这个X^{t+1}，决定模糊输入U^{t+1}，根据X^{t+1}，U^{t+1}决定X^{t+2}．再进一步求X^{t+3}，U^{t+3}，X^{t+4}，U^{t+4}，$\cdots$．

再一次考虑式(61)，(62)．现在，我们考虑下面的简单的例子．设时刻t的模糊状态X^t为有限集$X=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$上的模糊集，并设模糊输入(命令)$U^t$为有限集$U=\{\beta_1, \beta_2\}$上的模糊集．模糊集合$X^t$，$U^t$的隶属函数分别作为由$X$，$U$到$[0, 1]$的映射来给出．比如，若设模糊集合$X^t$的隶属函

数为 $\mu_t: X \to [0, 1]$，即 $0 \leqslant \mu_t(\alpha_i) \leqslant 1$，$\alpha_i \in X$，则模糊集 X^t 可用向量 $(\mu_t(\alpha_1), \mu_t(\alpha_2), \mu_t(\alpha_3), \mu_t(\alpha_4))$ 表示。即，可用实数 R 的直积空间 $R \times R \times R \times R (= R^4)$ 中的单位超立方体(用 C^4 表示)中的点表示。同样，模糊集 U^t 可用直积空间 R^2 中的单位超立方体 C^2（此时是单位正方形）中的点表示。因此，式(61)的函数 F 可定义为从 $C^4 \times C^2$ 到 C^4 的映射。同样，式(62)的函数 H 可定义为从 C^4 到 C^2 的映射。比如，若设模糊集 X^t 用向量 $(0.5, 0.8, 1, 0.6)$ 表示，而模糊集 U^t 用向量 $(1, 0.2)$ 表示，则根据函数 F，模糊集 X^{t+1}，比如，可用向量 $(0.2, 1, 0.8, 0.4)$ 表示。

可是，像这种既使 X，U 是相当小的有限集的情形，要精确求出由单位超立方体的直积到单位超立方体的映射 F，实际上近于不可能。因此，一般地，用与前面的式(8)表现了表1中 Y^t 与 U^t 关系的同样的方法，借助于例子，近似地给出函数 F 和 H 是必要的。换言之就是，在 X，U 中选择有限个有代表性的模糊集，把表示这些模糊集的名称到名称的映射 F，H 近似地表现出来，并将其用表来表现。比如，对于"若道路比较滑，把速度减下来"这样的模糊命令，为了表示函数 H，可用含有表示"把速度减下来"和"道路比较滑"这两个模糊集的名称的序偶来表现。

模糊命令的实行

在前面，我们看到了，是怎样用模糊集的隶属函数给模糊命令与模糊算法准确地"赋予意义"的。可是，给模糊命令准确地赋予意义本身，并没有解决怎样实行该命令这件事的不分明性。这种不分明性不是像"选择集合 A 中的任意 x"那样的模糊性，即，对于非决定性的命令也可讨论同样的问题。这里，为了说明实行模糊命令的不分明性的本质，我们考虑如下简单的模糊命令。

这时，设名称"几步"的模糊集(设为 A)的隶属函数 μ_A 如下给出。

$$\mu_A(0)=\mu_A(1)=\mu_A(2)=\mu_A(3)=0$$

$$\mu_A(4)=0.8;\ \mu_A(5)=\mu_A(6)=\mu_A(7)=1$$

$$\mu_A(8)=0.7;\ \mu_A(9)=\mu_A(10)=\cdots=0$$

将其用图表示就是图 6。那么，若给出了 $\mu_A(x)$，同时下了"向前走几步"的命令，人们将怎样行动呢？这里假定，他的行动不受那些，比如，为了走几步所需能量的消费等外界因素的一切影响。

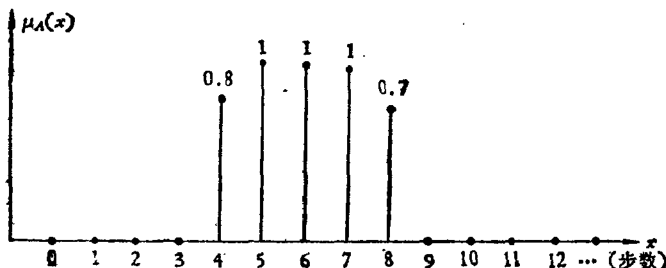


图 6 表示"步数"的模糊集 A

现在，我们把人们对这种模糊命令的反应，也就是人们对这种命令如何实行，用最直观的方法加以公式化。为此，我们就下面"概率实行"及"非决定实行"这两种形式进行考虑。

I 概率实行

在这种情况里假定，如果对可能发生的结果 x 分配给隶属度 $\mu_A(x)$，则这个 x 就以与 $\mu_A(x)$ 成比例的概率被选定。因此，在上例中，选步数 0，1，2，3 的概率为 0，以概率 0.8/4.5 选步数 4，以概率 1/4.5 选步数 5，6，7，以概率 0.7/4.5 选步数 8，以概率 0 选步数 9，10，11，…。其中 4.5 由 0.8+1+1+1+0.7 求得。因此，一般地，选择具有隶属度 $\mu_A(x_i)$

$i=1, 2, \cdots, n$ 的 x_i 的概率 p_i 由

$$p_i = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)}$$

给出。

作为这种概率实行方式的一般形式，可以这样考虑：预先给出一个特别的阈值 α，具有比 α 还小的隶属度的 x 不予实行。比如，在上例中，若设 $\alpha = 0.8$，则表明步数 0，1，2，3，8，9，10，11，…不予实行，而步数 4 以概率 0.8/3.8，步数 5，6，7 以概率 1/3.8 实行，其中 3.8=0.8+1+1+1。

II 具有阈值的非决定实行

这种情况是假定，若设对某个阈值 α，满足 $\mu_A(x) \geqslant \alpha$ 的 x 的集合为 A_α，即 $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$，则与非决定性算法同样，不论选择 A_α 所含的哪一个 x，即实行哪一个 x 都可以。比如，在上例中，若设 $\alpha = 0.8$，则 $A_\alpha = \{4, 5, 6, 7\}$，这表明实行 4，5，6，7 中哪一步数都可以。

作为非决定实行方式的特殊情况，考虑下面的情况。即，α 取最大值，不是 $A_\alpha = \varnothing$ 的情况。即，A_α 为模糊集合 A 中具有最大隶属度的点所成的集合的情况。比如，在上例中，$\alpha = 1$，$A_\alpha = \{5, 6, 7\}$。

上述的非决定实行方式对于如下的条件模糊命令也能适用。

"若 x 大，把 y 增大几个单位"这里，设 x，y 为非负整数，所谓"大的 x"这一模糊集合 B 是用如下隶属函数表示其特征的。

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

这里的 α 是特殊确定的阈值，比如，设 $\alpha=0.9$，$B_\alpha=\{x|\mu_B(x)\geqslant 0.9\}$。于是，对于 B_α 中的每个 x，所谓"把 y 增加几个单位"这一(无条件的)模糊命令可用前面讲过的"概率"方法或"非决定"方法实行。而对于不属于 B_α 的 x，这样的模糊命令不能实行。

以上，用简单的例子对模糊命令的实行进行了叙述。由于对这种模糊命令实行的问题实际上是多方面的，复杂的，所以这些方法不一定是完全的解答。不过，对这种模糊命令(一般来说是模糊算法)实行的问题来说，确实是一个接近的方法。

模糊图灵(计算)机

在前面讲了广义的算法。可以说明，再略窄意义下的数学算法，即在可数集上讨论的算法，可以与图灵机一对一地进行讨论。现在，我们在图灵机中导入模糊集，模糊系统的概念，并且定义"模糊图灵机"。

模糊图灵机

FM 就是用

$$\mathrm{FM}=(K,\ \Sigma,\ \Gamma,\ f,\ h,\ B,\ F) \tag{63}$$

表示的系统。其中，K, Σ, Γ, F 分别是**状态**，**输入记号**，**纸带记号**，**最终状态**的有限集，这里，$\Sigma\subseteq\Gamma$，$F\subseteq K$，而 $B\in\Gamma-\Sigma$ 是**空白记号**。f 是映射

$$f: K\times\Gamma\times K\times(\Gamma-\{B\})\times\{-1,\ 0,\ +1\}\to[0,\ 1] \tag{64}$$

称为**转移函数**，其中，$\{-1,\ 0,\ 1\}$ 中的 -1, 0, $+1$ 分别表示将磁头"向左移动 1 个格"，"停止"，"向右移动 1 个格"。h 是函数

$$h: K\to[0,\ 1] \tag{65}$$

表示**初始分布**。

可知函数 f，h 对应模糊集的隶属函数。

$\Gamma^*K\Gamma^*$ 的元素称为**模糊图灵机 FM** 的时点表示。比如，时点表示 $a_1\cdots a_{i-1}pa_i\cdots a_m$（其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \Gamma, p \in K$）表示 FM 在状态 p 时读纸带上的序列 $a_1\cdots a_m$ 的第 i 个记号 a_i。

现在定义如下的函数 μ。对于 FM 的时点表示 α, β，有

$$
\mu(\alpha,\beta)\begin{cases}
f(p, a, q, b, 0), & 若\ \alpha = upav, \beta = uqbv \\
f(p, B, q, b, 0), & 若\ \alpha = vp,\ \beta = vqb \\
f(p, a, q, b, +1), & 若\ \alpha = vpav,\ \beta = ubqv \\
f(p, B, q, b, +1), & 若\ \alpha = up,\ \beta = ubq \\
f(p, a, q, b, -1), & 若\ \alpha = ucpav,\ \beta = uqcbv \\
 & 或\ \alpha = pav,\ \beta = qBbv \\
f(p, B, q, b, -1) & 若\ \alpha = uap,\ \beta = uqcb \\
 & 或\ \alpha = p,\ B = qBb \\
0 & 其它情形
\end{cases}
$$

其中，$u, v \in (\Gamma - \{B\})^*$，$a, b, c \in \Gamma - \{B\}$。

函数 $\mu(\alpha, \beta)$ 表示，给出"现在的"时点表示 α 时，"下一个"时点表示为 β 的隶属度。

可以将这个函数 μ 推广为如下的函数 $\mu^{(n)}(\alpha,\beta)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

$$
\mu^{(0)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu^{(n+1)}(\alpha, \beta) &= \max\ \min[\mu^{(n)}(\alpha, \gamma), \mu(\gamma, \beta)] \\
&= \bigvee_{\gamma} [\mu^{(n)}(\alpha, \gamma) \wedge \mu(\gamma, \beta)]
\end{aligned}
$$

其中，max（或 $\vee$）是对所有的时点表示来取的。

函数 $\mu^{(n)}(\alpha, \beta)$ 表示"现在的"时点表示为 α 时，"n 步后的"时点表示为 β 的隶属度。

可知，这个模糊图灵机的转移情况与先前讲的模糊系统

的转移情况是对应的。

对普通的图灵机是讨论某个序列是否被受理，而对模糊图灵机则是求序列被受理的隶属度．对此可如下求出．

若设模糊图灵机 FM 的初始时点表示为 px（其中 $p\in K$，$x\in\Sigma^*$），n 步后的时点表示为 yq（其中 $y\in\Gamma^*$，$q\in F$），则根据此 FM，序列 x 被受理的隶属度 $\mu(x)$ 可用下式给出

$$\mu(x)=\bigvee_{\substack{p\in K\\ q\in F\\ y\in\Gamma^*\\ x\in M^*}}[h(p)\wedge\mu^{(n)}(px,yq)]$$

以上对模糊算法作了简单的说明，但这些说明对模糊算法没有给出一般的解决．然而，模糊算法在日常生活中会经常遇到，人们对于它都进行了很好的处理．可是，如果将这种模糊算法的问题作数学的、逻辑的解释是多方面的，而且是非常复杂的．如果解决了模糊算法，而且计算机能够解释实行该模糊算法，当然，计算机的能力要飞快地增强，这有待于今后模糊算法的深入研究。

第十章　模糊语言

现在,我们来说明模糊语言理论,它是模糊集论的一个应用．虽然模糊语言尚处于不发达的状态，但可以预期它将会成为自然语言的良好模型.

下面，我们将叙述模糊语言的定义、模糊语言的语法论、语义论.

§1. 模糊语言

在普通的形式语言理论中，所谓语言是定义为有限字母表上的序列的集合,但是,这样的定义对于多数的目的来说过于狭窄．这是因为,本来所谓语言是具有某种机能的系统,这种机能指的是把单词的序列和用这些序列叙述的对象集合或者构成概念的集合对应起来的机能.

与普通的形式语言相反，在下面将要讲的模糊语言的定义中，单词的序列与对象集合间的对应是以明确的形式表示出来的．而且与自然语言一样,单词与对象的对应是模糊的.因此,模糊语言的概念是比以往的形式语言更为广阔的、更为一般的概念.

首先,从模糊语言的定义开始.

定义 1　模糊语言 L 是用 4 元组

$$L=(U,\ T,\ E,\ N) \tag{1}$$

表示的系统．这里

[1]　U 是**论域**

[2] T是表现U中模糊子集名称的**言词、单词或术语**的模糊集合. T称为**术语集合**

[3] E是由表示术语的符号以及将符号连结起来的东西所组成的集合, E称为对于T的**嵌入集合**. T是E的模糊子集.

[4] N是从E(特别情况下是T的支集)到U的模糊关系,称为**命名关系**.

上面U, T, E, N的关系用图表示,则如图1.

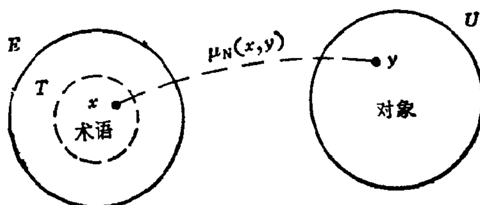


图1 模糊语言$L=(U,T,E,N)$的说明图

$U=$论域; $T=$术语集合; $E=$对于T的嵌入集合; $N=E$到U的命名关系; $x=$术语; $y=$对象; $\mu_N(x,y)=x$与y的关系的强度; $\mu_T(x)=T$中x的隶属度.

对这些说法,下面再详细地加以说明.

(1) 模糊语言L的第一个元素U是"论域",是对象、动作、关系、概念等的集合. 比如, U可以是整数的集合;房间里物品的集合;房间里物品的集合以及这些物品之间关系的集合;人们看到过的以及正在看到的,能够想像的对象的集合;颜色的集合;味的集合;整数集合和由整数到整数的函数集合的并集合等等. 总而言之, U像列出的名称那样,是构成L中所论主题的对象及构成概念所组成的集合.

(2) 术语集合T是表示U中模糊子集名称的言词、术语所组成的集合. 一般情况下, T的元素是取声音、图形、文字序列等种种形式,可是在这里,假定是取有限个字母作成的文

字序列，即单词的形式．比如，在英语中，T是所有的英文单词以及由这些单词合乎道理地连结起来的东西(即句子)的集合．

(3) 对于T的嵌入集合 E，多数情况下是把某个字母表A的符号连结起来的东西的集合．比如，在英语中，A可看作是英文字母的集合，E是由这些字母组成的所有有限序列的集合．又如，在形式语言中，A是 V_T (终极符的集合)．而E可看作是 V_T 上的有限序列全体 V_T^*．

假定术语集合T为E中的模糊子集．在T的元素中(即术语中)，有**原子的**和**合成的**两种．所谓原子术语定义为那样的序列，即不存在作为其子序列的术语．合成术语是由原子术语连结起来的．例如，*red*, *roob* 等单词是原子术语，将它们连结起来的 *red roob* 是合成术语．

但是，由于我们假定术语集合T是E中的模糊集合，所以T可以用隶属函数 μ_T: $E \to [0, 1]$ 表示其特征．即对于各术语 $x \in E$，给定它在T中的隶属度 $\mu_T(x)$．比如，若设E为字母表 $A = \{a, b, +\}$ 上的有限序列的全体，则T中几个有代表性的序列的隶属度成为

$$\mu_T(a+b) = 1.0 \qquad \mu_T(a+b+b) = 1.0$$
$$\mu_T(+a) = 0.8 \qquad \mu_T(+a+b) = 0.8$$
$$\mu_T(++a) = 0.1 \qquad \mu_T(a++b) = 0.1$$

隶属度 $\mu_T(x)$，具体地说是用以表示x的合式性的程度或者语法正确性的程度的．比如，若设T为英语中单词、句子的模糊集合，则有

$$\mu_T(\text{John went home yesterday}) = 1.0$$
$$\mu_T(\text{John yesterday went home}) = 0.8$$
$$\mu_T(\text{John home went yesterday}) = 0.2$$

在这种模糊语言定义中，没有必要清楚地定义某术语x

是属于 T 还是不属于 T，即使有不分明状态也是可以的。

(4) 命名关系 N 是从 E 到 U 的模糊关系，可用二变数的隶属函数

$$\mu_N: \text{supp}(T) \times U \to [0, 1] \tag{2}$$

表示其特征。即对于各数对 (x, y)，$x \in T$，$y \in U$，给定隶属度 $\mu_N(x, y) \in [0, 1]$[1)]。

例如，若设 U 是由 1 到 100 的年龄所组成的集合，x 为术语 young（年轻的），$y = 35$ 岁，则

$$\mu_N(\text{young}, 35) = 0.2$$

另一方面，对于术语 old、middle-aged（年老的，中年的），则有

$$\mu_N(\text{old}, 35) = 0$$

$$\mu_N(\text{middle-aged}, 35) = 0.02$$

同样地，若设 y 表示成年男人的身长 (cm)，则有

$$\mu_N(\text{tall}, 155) = 0.2 \quad \text{tall} \quad (\text{高的})$$

$$\mu_N(\text{tall}, 163) = 0.5$$

$$\mu_N(\text{tall}, 177) = 0.9$$

$$\mu_N(\text{tall}, 190) = 1.0$$

在上例中，对于几个有代表性的值 x，y 给出了 $\mu_N(x, y)$ 的值。若想完整地定义模糊语言，只要对所有的 $x \in T$ 及 $y \in U$，把 μ_N 的值用表格等表示出来就可以。可是，当 T、U 是由少数元素组成的集合时，用表格给出 μ_N 是可行的，而当 T，U 既使不是无限而是由相当多的元素组成的集合，若用表格定义 μ_N 实际上是非常困难的。对于这个问题，曾这样考虑过，即从某有限个代表元素的值，用抽象化的办法类推出全部的值，但没有得到完全解决。在这里不涉及上面提到的问题，我

1) 以后，若写 $x \in T$，意即 $x \in \text{supp}(T)$。

们假定 μ_N，μ_T 等的隶属函数是已经给出的，或者是能够计算的。

下面，关于求 $\mu_T(x)$，$\mu_N(x, y)$ 的值，不采用表格法，而对于具有能够计算这些值的结构的模糊语言（构造的模糊语言）进行说明.

定义 2 所谓**构造的模糊语言** L 是

$$L = (U, S_T, E, S_N) \tag{3}$$

[1] U 是论域

[2] E 是对于术语集合 T 的嵌入集合

[3] S_T 是 L 的**语法规则**所组成的集合，是为计算 T（术语集合）中隶属函数 μ_T 提供算法的.

[4] S_N 是 L 的**语义规则**所组成的集合，是为计算模糊命名关系 N 的隶属函数 μ_N 提供算法的.

这些语法规则及语义规则分别在讨论模糊语言 L 的语法论及语义论时是重要的(参考 §3).

定义 1 与定义 2 中的模糊语言定义的差别是，在定义 1 的不具有结构的模糊语言的情况中，假定对于模糊集 T 及模糊关系 N 的隶属函数 μ_T，μ_N 是用表格方法等预先清楚给出的. 另一方面，在具有结构的模糊语言（定义 2）的情况中，存在有使用语法规则及语义规则分别能计算 μ_T，μ_N 的结构.

当 T 是非模糊集时，计算 μ_T 的程序能还原于决定某已给出序列 x 是否是 T 的元素的程序，换句话说，也就是能还原于生成 T 的元素的程序. 同样地，当 N 是非模糊关系时，计算 μ_N 就归结为已给序偶 (x, y) 是否属于 N 的程序，换言之，即归结为生成 N 中序偶 (x, y) 的程序.

我们说，具有和不具有结构的语言是**模糊的**，是指 T 或 N 或者两个都是模糊集的情况. 因此，所谓非模糊语言，是指 T 和 N 都是非模糊的情况. 又，特别是所谓非模糊构造语言是

指语法和语义任何一个都不是模糊的情况．由这一点可以说，程序语言是非模糊的构造语言，对此，可把自动编码器看做是将计算术语集合T和命名关系N的二值隶属函数的规则具体化．即，由于使用语法规则，自动编码器能够决定已给的序列(语句)x是不是T中的术语，也就是能够决定在语法方面是不是正确的语句．若x在T中(若语法方面是正确的)，则使用语义规则自动编码器能计算$\mu_N(x, y)$（其中$y \in U=$机器语言集合)，能决定对应于x的机器语言的命令y.

另一方面，自然语言具有与程序语言不同的模糊语法、模糊语义．语法的模糊性，可表示为英语中语法的正确程度．比如说，μ_T(John yesterday went home)$=0.8$．可是，多数情况是，句子的语法方面的正确程度规定为1或0，即，规定为语法方面完全正确或是完全错误．所以可以认为自然语言的术语集合中，合乎语法的句子和不合乎语法的句子之间有很清楚的界限．也就是说，认为术语集合接近于非模糊集比认为它是模糊集合适．

可是，与“语法”的模糊性相反，“语义”的模糊性在自然语言中是相当显著的．例如，像刚才指出的那样，设U(论域)是由1到100的年龄所组成的集合，则原子术语年轻的，年老的等不对应于U中被清楚定义的子集．同样，对于不很年轻的和不很年轻也不很年老的等合成术语也可以这样说．事实上，自然语言中大部分术语与其说是U的子集莫如说是对应其模糊子集的．

一般来说，自然语言由不太模糊的语法和相当模糊的语义为其特征这一事实，除了有限个字母的情形外，在T与无限个字母相关时，就不一定真实．即，语言的术语在取声音、图画、手写的字等形式时，语法的模糊性就相当显著．例如，对于一个字母(比如A)，手写的字和声音的种类就是有模糊性的．

而且，关于模糊性这一点来说，对于与手写字或与声音有关联的东西也是显然的.

§2. 语　　义

下面我们将用最初给出的模糊语言，能够对于非常难以掌握其"意义"的概念，给出具体的定义.

若设 μ_N: $\text{supp}(T) \times U \to [0, 1]$ 为表示N的特征的隶属函数，则 $\mu_N(x, y)$ 表示T中术语与U中对象y之间关系的强度. 因此，可如下给出x的语义定义.

定义 3　所谓T中术语x的**语义**是U中模糊子集 $M(x)$，这时，U中元素y的隶属度由

$$\mu_{M(x)}(y) = \mu_N(x, y) \tag{4}$$

给出.

例 1　设U为我们能够看见的东西的集合. 而T为术语"白"，"灰"、"绿"，"蓝"，"黄"，"红"及"黑"所组成的集合. 于是各术语，比如"红"，可看做是U中的颜色为红的元素的模糊子集的名称. 因此，"红"的语义M(红)是U中的模糊子集.

例 2　设U是从 1 到100的年龄所组成的集合，T = {年轻的，年老的，中年的，不年轻的，不是中年的，年轻的或年老的，不年轻也不年老的}. 又，设N为如下定义的由E到U的模糊命名关系.

$$\mu_N(\text{young}\ \ y) = \begin{cases} 1 & y < 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & y \geq 25 \end{cases}$$

$$\mu_N(\text{old}\ \ y) = \begin{cases} 0 & y < 50 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & y \geq 50 \end{cases}$$

$\mu_N(\text{middle-aged}, y) =$

$$\begin{cases} 0 & 1 \leqslant y < 35 \\ \left(1 + \left(\frac{y-45}{4}\right)^4\right)^{-1} & 35 \leqslant y < 45 \\ \left(1 + \left(\frac{y-45}{5}\right)^2\right)^{-1} & y \geqslant 45 \end{cases}$$

再有，T的其余元素可用 young, old 及 middle-aged 和下面指出的规定来定义. 即"not"(非)解释为取否定的运算，"and"(并且)及"or"(或)分别解释为取U中的"交"及"并"的运算. 这样一来，就有

$$\mu_N(\text{not old}, y) = 1 - \mu_N(\text{old}, y)$$
$$\mu_N(\text{not young}, y) = 1 - \mu_N(\text{young}, y)$$
$$\mu_N(\text{not middle-aged}, y) = 1 - \mu_N(\text{middle-aged}, y)$$
$$\mu_N(\text{young or old}, y) = \mu_N(\text{young}, y) \vee \mu_N(\text{old}, y)$$
$$\mu_N(\text{not young and not old}, y) = (1 - \mu_N(\text{young}, y)) \wedge (1 - \mu_N(\text{old}, y))$$

其中符号$\wedge$，$\vee$分别表示min，max. 比如，若设$y = 57$，则

$$\mu_N(\text{young}, 57) = 0.024$$
$$\mu_N(\text{old}, 57) = 0.66$$
$$\mu_N(\text{middle-aged}, 57) = 0.15$$
$$\mu_N(\text{not old}, 57) = 1 - 0.66 = 0.34$$
$$\mu_N(\text{not young}, 57) = 1 - 0.024 = 0.976$$
$$\mu_N(\text{not middle-aged}, 57) = 1 - 0.15 = 0.85$$
$$\mu_N(\text{young or old}, 57) = 0.024 \vee 0.66 = 0.66$$
$$\mu_N(\text{not young and not old}, 57) = (1 - 0.024) \wedge (1 - 0.66) = 0.976 \wedge 0.34 = 0.34$$

这样一来，术语 young 的语义则表示为$U = [0, 100]$中

的模糊子集 $M(\text{young})$，而其隶属函数可如下给出。

$$\mu_{M(\text{young})}(y)=\begin{cases}1 & y<25\\ \left(1+\left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & y\geqslant 25\end{cases}$$

同样也可求 old, middle-aged 等的语义(图 2)。

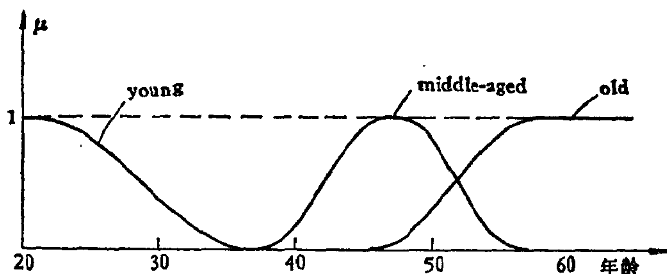


图 2 模糊集 $M(\text{young})$, $M(\text{middle-aged})$, $M(\text{old})$

例 3 现在，我们考虑所谓几个(several)这一模糊术语。若设 U 为非负整数集，则“几个”可看做是由如下序偶的集合给出的 U 的模糊子集 $M(\text{several})$ 的名称。

$$M(\text{several})=\{(3,\ 0.4),(4,\ 0.8),(5,\ 1.0),(6,\ 1.0),(7,\ 1.0),(8,\ 0.4)\}$$

其中只记有隶属度为正的情况。

使用定义 3 可以导出各种与语义概念相关的概念。例如

定义 4 所谓**模糊概念**，就是论域的模糊子集。在这个意义下，由于术语可看做是对于 U 的子集的名称，所以若设 x 为术语，则它的语义 $M(x)$ 是模糊概念。

在模糊命名关系 $\mu_N(x,\ y)$ 中，固定 $x\in T$，可定义 x 的语义，与此相对，固定 $y\in U$，能定义 y 的描述集合 $D(y)$。

定义 5 若固定 U 的特别元素(设为 y_0)，则模糊关系 μ_N

(x, y_0) 引出 T 中的模糊集 $D(y_0)$，$D(y_0)$ 用隶属函数

$$\mu_{D(y_0)}(x) = \mu_N(x, y_0) \tag{5}$$

表示其特征。这个 T 中的模糊集 $D(y_0)$ 称为对于 y_0 的**描述集**，是表示用 T 的元素描述 y_0 的范围的特征的。

例如，若在方才的例 2 中设 $y_0 = 57$，则有

$D(y_0) = \{$(young, 0.024), (old, 0.66), (middle-aged, 0.15), (not old 0.34), (not young, 0.976), (not middle-aged, 0.85), (young or old, 0.66), (not young and not old, 0.34)$\}$

定义 6 若设 N 为由 E 到 U 的模糊命名关系，则它的**定义域** $D(N)$ 是 T 中的模糊集，是 N 到 E 上的影[1]。$D(N)$ 的隶属函数 $\mu_{D(N)}$ 由

$$\mu_{D(N)}(x) = \bigvee_y \mu_N(x, y) \tag{6}$$

给出。其中上限 $\bigvee_y$ 是对所有 $y \in U$ 取的。

$D(N)$ 中的 x 的值 $\mu_{D(N)}(x)$，在某种意义下，是被解释为 x 的**意义丰满性**的程度。所谓"某种意义下"，一般来说，是因为这种意义丰满性概念，只是按 $D(N)$ 的解释，然而还有很多方面包括不尽。

根据 $D(N)$ 的定义，所谓 x 是**完全意义丰满的**，是指 x 的语义 $M(x)$ 为正规模糊集的情况。即

$$\mu_{D(N)}(x) = \bigvee_y \mu_N(x, y) = 1 \tag{7}$$

成立。换言之，所谓 x 是完全意义丰满的，是指存在使 $\mu_N(x,$

---

1) 设 A 为 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, X_i = \{x_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 中的模糊集，若隶属函数为 $\mu(x_1, \cdots, x_n)$，则 A 到 $X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ 上的影为 $X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ 中的模糊集，隶属函数 μ_1 为

$$\mu_1(x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{x_1} \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$y) = 1$ 的 y.反之，所谓 x 是无意义的是指 $M(x)$ 为空集，即对于所有的 $y \in U$，$\mu_N(x, y) = 0$ 的情况。

例 4 设 U 为整数 1，2，…，10 所组成的集合。术语"**小的**"，"**大的**"，"**既不小也不大**"，"**既大又小**"定义为如下的 U 中的子集

$$M(\text{small}) = \{(1, 1.0), (2, 1.0), (3, 0.8), (4, 0.2)\}$$

$$M(\text{large}) = \{(7, 0.2), (8, 0.8), (9, 1.0), (10, 1.0)\}$$

$$M(\text{not small and not large}) = \overline{M}(\text{small}) \cap \overline{M}(\text{large})$$

$$M(\text{large and small}) = M(\text{large}) \cap M(\text{small})$$

这里 $\overline{M}$ 是 M 的补集，运算 $\cap$ 表示模糊集的交。因此

$$M(\text{not small and not large}) = \{(3, 0.2), (4, 0.8), (5, 1.0), (6, 1.0), (7, 0.8), (8, 0.2)\}$$

$$M(\text{large and small}) = \text{空集}$$

因此，可以说 not small and not large 是完全意义丰满的，而 large and small 是无意义的。

与语义有关的重要问题之一是语义依赖于文脉。即，一般来说，所谓术语 x 的语义是指当它为合成术语的一部分时，依赖于产生 x 的文脉。例如，在例 2 中是默认术语 young, old, middle-aged 等是加在人上的形容词，并且是在这种理解下定义的。若设这些形容词是加在狗上的，则 U 中的模糊集 $M(\text{young})$ 等将变成不同的东西了。

下面讲模糊语言的语法论，语义论。

§3. 模糊语言的语法论

模糊语法是计算模糊语言的 T（术语集合）中的隶属函

数的算法. 现在我们讲模糊语法的各种性质. 应当注意的是,这个模糊语法是给E(嵌入集合)中的模糊集附以特征的,但是,用它描述实际的自然语言的语法是不充分的. 不过现在还没有找到描述自然语言的语法(具有不分明性)的最佳模型.

模糊语法可以作为普通形式语法的直接扩张来讨论.

首先,对普通形式语法中使用的记法作一简单说明.

V_T是**终极符**的有限集(字母表). 比如,英文中的字母表就是,V_T^*是将V_T中的元素连结起来的有限序列的全体. 比如,若设$V_T=\{a, b\}$,则$V_T{*}=\{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, aaa, \cdots\}$. 空序列$\varepsilon$是$V_T{*}$的元素. V_N是**非终极符**的有限集,即$V_T{*}$中模糊集的标记的有限集,$V_I{*}$被称为**语法范畴**. 例如,名词N,动词V,名词句NP等的语法范畴是V_N的元素.而且设终极语V_T和非终极语V_N不相交,即设$V_I \cap V_N=\varnothing$.

若设在构造的模糊语言$L=(U, S_T, E, S_N)$中$E=V_I{*}$,则术语集合T是$V_T{*}$中的模糊集,它用对各序列$x(\in V_T{*})$的隶属度为$\mu_T(x)$, $0 \leqslant \mu_T(x) \leqslant 1$的隶属函数$\mu_T$: $V_T{*} \to [0, 1]$表示其特征.

为了表示模糊集T,可用各序列$x(\in V_T{*})$和$\mu_T(x)$所成的序对组成的集合

$$T=\{(x, \mu_T(x))\}, \quad x \in V_T{*} \tag{8}$$

表示.

比如,若设$V_T=\{a, b\}$,则

$$T=\{(a, 1.0), (b, 1.0), (aa, 0.8), (ab, 0.7), (ba, 0.6), (bb, 0.5)\} \tag{9}$$

这里,在上面没有记上的序列的隶属度为0. 今后规定隶属度为0的序列不予列出. 即,规定只以T的支集$\text{supp}(T)=$

$\{x \mid \mu_T(x) > 0\}$ 的元素为对象.

因此,对于模糊集的并、交、补集,连结 Kleene 闭包等可作为形式语法情况的扩张,定义如下.

设 T_1, T_2 为 V_T* 中的模糊集,于是

并: T_1 与 T_2 的**并**用 $T_1 + T_2$ 表示(一般记为 $T_1 \cup T_2$,但这里规定记为 $T_1 + T_2$),把它定义如下.

$$\begin{aligned}\mu_{T_1+T_2}(x) &= \max\{\mu_{T_1}(x), \mu_{T_2}(x)\}, \ x \in V_T* \\ &= \mu_{T_1}(x) \vee \mu_{T_2}(x)\end{aligned} \tag{10}$$

交: T_1 与 T_2 的**交**用 $T_1 \cap T_2$ 表示,如下定义.

$$\begin{aligned}\mu_{T_1 \cap T_2}(x) &= \min\{\mu_{T_1}(x), \ \mu_{T_2}(x)\} \ \ x \in V_T* \\ &= \mu_{T_1}(x) \wedge \mu_{T_2}(x)\end{aligned} \tag{11}$$

补集: T_1 的**补集**用 $\bar{T}$ 表示,如下定义.

$$\mu_{\bar{T}_1}(x) = 1 - \mu_{T_1}(x) \ \ x \in V_T* \tag{12}$$

连结: T_1, T_2 的**连结**用 $T_1 T_2$ 表示,如下定义.

若设 V_T* 中的 x 可表示为前子序列 u 和后子序列 v 的并列,即 $x = uv$, 则

$$\begin{aligned}\mu_{T_1T_2}(x) &= \sup_u \min\{\mu_{T_1}(u), \mu_{T_2}(v)\} \\ &= \bigvee_u \{\mu_{T_1}(u) \wedge \mu_{T_2}(v)\}\end{aligned} \tag{13}$$

克林尼 (Kleene) 闭包: 用 V_T* 中模糊集的并及连结,模糊集 T 的克林尼闭包 T^* 定义如下.

$$T^* = \varepsilon + T + TT + TTT + TTTT + \cdots \tag{14}$$

为了表达 V_T* 中的模糊集 T, 虽然我们已用过了式 (8) 的表示法,但用下面的表示法也是很方便的.

$$T = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \cdots \tag{15}$$

其中, x_i 是模糊集 T 的支集的元素, μ_i 是对于 x_i 的隶属度, 即 $\mu_i = \mu_T(x_i)$.

例如,在方才讲过的例子 (式 (9)) 中,有

$$T = 1.0a + 1.0b + 0.8aa + 0.7ab + 0.6ba + 0.5bb$$

若用这个表示法，则

$$T = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \cdots$$

$$T' = \mu_1' x_1' + \mu_2' x_2' + \mu_3' x_3' + \cdots$$

的连结 TT'，当序列 x, x' 的连结用 xx' 表示时，成为

$$TT' = \sum_i \sum_j (\mu_i \wedge \mu_j') x_i x_j' \tag{16}$$

其中

$$\mu_i \wedge \mu_j' = \min\{\mu_i, \mu_j'\}$$

$$\mu_i + \mu_j' = \mu_i \vee \mu_j' = \max\{\mu_i, \mu_j'\}$$

于是，模糊集 TT' 中的序列 $v = x_i x_j'$ 的隶属度可如下给出。

$$\mu_{TT'}(v) = \bigvee_{x_i, x_j'} \{\mu_T(x_i) \wedge \mu_T(x_j')\} \tag{17}$$

这与方才得到的式(13)相同。这里，运算 $\vee(=\max)$ 是对 $v = x_i x_j'$ 的所有的 x_i, x_j' 取的。

例 5 作为简单的例子，设 $V_T = \{a, b\}$，

$$T = 0.2a + 0.3ab + 1.0aba$$

$$T' = 0.3a + 0.8aba + 1.0\varepsilon$$

其中 ε 为空序列[1]，于是

$$\begin{aligned}
TT' = & (0.2 \wedge 0.3)a \cdot a + (0.3 \wedge 0.3)ab \cdot a \\
& + (1.0 + 0.3)aba \cdot a + (0.2 \wedge 0.8)a \cdot aba \\
& + (0.3 \wedge 0.8)ab \cdot aba + (1.0 \wedge 0.8)aba \cdot aba \\
& + (0.2 \wedge 1.0)a + (0.3 \wedge 1.0)ab + (1.0 \wedge 1.0)aba \\
= & 0.2aa + 0.3aba + 0.3abaa + 0.2aaba \\
& + 0.3ababa + 0.8abaaba + 0.2a + 0.3ab \\
& + 1.0aba
\end{aligned}$$

---

1) 对于空序列(empty string)ε，若 x 为 V_T* 中的任意序列，则一般地有 $x\varepsilon = \varepsilon x = x$。

由于 $0.3aba + 1.0aba = (0.3 \vee 1.0)aba = 1.0aba$,所以,

$$
\begin{aligned}
TT' = & 0.2aa + 1.0aba + 0.3abaa + 0.2aaba \\
& + 0.3ababa + 0.8abaaba + 0.2a + 0.3ab
\end{aligned}
$$

如以后所讲的那样，模糊集的连结及克林尼闭包在定义 T 的语法时是最重要的.

构造的模糊语言 $L = (U, S_T, V_T*, S_N)$ 中的 S_T 是 L 的语法规则集合,它生成模糊集 T 的支集中的序列,而且给出计算 T 的隶属度 μ_T 的算法. 换言之,可以说 S_T 是构成关于 L 的模糊语法的.

对于模糊语法有种种考虑，作为其中之一可以定义由普通句构造语法扩张而得的模糊语法. 下面对这种模糊语法进行说明.

模糊句构造语法，为简单起见就说模糊语法 (fuzzy grammar) 是用如下的 4 元组表示的系统

$$G = (V_T, V_N, S, P) \tag{18}$$

这里

(1) V_T 是终极符集合

(2) V_N 是非终极符集合，其中 $V_N \cap V_T = \varnothing$

(3) $S \in V_N$ 是初始符号,表示句子的语法范畴.

(4) P 是如下的模糊生成式所组成的有限集.

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta \tag{19}$$

这里,α, β 是 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的序列,其中 $\alpha \neq \varepsilon$. ρ 满足 $0 < \rho \leqslant 1$, 表示当 α 已给时 β 的隶属度（在普通句构造语法中,表达式 $\alpha \rightarrow \beta$ 表示书写替换规则).

因此,若 $\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$,设 γ, δ 为 $(V_N \cup V_T)^*$ 中的任意序列,则有

$$\gamma\alpha\delta \xrightarrow{\rho} \gamma\beta\delta \tag{20}$$

我们说 $\gamma\beta\delta$ 是由 $\gamma\alpha\delta$ **直接导出的**

另外，α, β, γ, δ 是对 $V_T{}^*$ 中模糊集的标记，$\gamma\alpha\delta$, $\gamma\beta\delta$ 在式 (16) 中是表示这些模糊集的连结的.

设 u 和 v 是 $(V_T\cup V_N)^*$ 中的序列，若存在如下的 $(V_T\cup V_N)^*$ 中的序列 α_1, α_2, $\cdots\alpha_{n-1}$ 时，即当

$$u\xrightarrow{\rho_1}\alpha_1\xrightarrow{\rho_2}\alpha_2\cdots\xrightarrow{\rho_{n-1}}\alpha_{n-1}\xrightarrow{\rho_n}v \tag{21}$$

时，则说 v 是可由 u 用导出链 $(u, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_{n-1})$ **导出的.**

这个导出链的强度定义为链中最弱环的强度，即

$(u, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, v)$ 的强度

$$=\min\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n\}=\rho_1\wedge\rho_2\wedge\cdots\wedge\rho_n \tag{22}$$

u 与 v 之间的关系的强度 ρ 定义为 u 与 v 之间最强的导出链的强度，即

$$\rho=\sup\ \min\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n\}=\vee\{\rho_1\wedge\rho_2\wedge\cdots\wedge\rho_n\} \tag{23}$$

其中 sup(= $\vee$) 是对 u 到 v 的所有导出链取的.

由模糊语法 G 生成的模糊集 T 是用如下方法定义的.

定义 7 模糊语法 G 生成模糊术语集合 T （详细一点记为 $T(G)$）是用如下方法定义的：

(1) 所谓终极序列 x (即 $V_T{}^*$ 中的序列)在 $T(G)$ 中(即在 $T(G)$ 的支集中)，是指 x 可由 S 导出.

(2) $T(G)$ 中的 x 的隶属度(记为 $\mu_T(x)$) 用 S 与 x 之间关系的强度给出. 即，在式 (21) 中，如果做置换 $u=S$, $v=x$ $(\in V_T{}^*)$，则得

$$S\xrightarrow{\rho_1}\alpha_1\xrightarrow{\rho_2}\alpha_2\cdots\xrightarrow{\rho_{n-1}}\alpha_{n-1}\xrightarrow{\rho_n}x\ \ (\in V_T{}^*) \tag{24}$$

由式 (23)，ρ (即 $\mu_T(x)$) 可如下给出

$$\mu_T(x)=\vee\{\rho_1\wedge\rho_2\wedge\cdots\wedge\rho_n\} \tag{25}$$

下面给出模糊语法的简单例子.

例 6 在模糊语法 $G=(V_T, V_N, S, P)$ 中，$V_T=\{a,$

$b\}$, $V_N=\{A, B, S\}$，而 P 如下给出

$$S\xrightarrow{0.5}AB \qquad A\xrightarrow{0.5}a$$

$$S\xrightarrow{0.8}A \qquad A\xrightarrow{0.6}b$$

$$S\xrightarrow{0.8}B \qquad B\xrightarrow{0.4}A$$

$$AB\xrightarrow{0.4}BA \qquad B\xrightarrow{0.2}a$$

现在，我们考虑终极序列 a. 对这个序列的可能的导出链如下给出：

$$S\xrightarrow{0.8}A\xrightarrow{0.5}a$$

$$S\xrightarrow{0.8}B\xrightarrow{0.2}a$$

及

$$S\xrightarrow{0.8}B\xrightarrow{0.4}A\xrightarrow{0.5}a$$

因此 a 的生成隶属度 $\mu_T(a)$ 由

$$\mu_T(a)=(0.8\wedge 0.5)\vee(0.8\wedge 0.2)\vee(0.8\wedge 0.4\wedge 0.5)=0.5$$

给出. 同样,对序列 ab 的导出链如下给出.

$$S\xrightarrow{0.5}AB\xrightarrow{0.5}aB\xrightarrow{0.4}aA\xrightarrow{0.6}ab$$

$$S\xrightarrow{0.5}AB\xrightarrow{0.4}AA\xrightarrow{0.5}aA\xrightarrow{0.6}ab$$

$$S\xrightarrow{0.5}AB\xrightarrow{0.4}BA\xrightarrow{0.2}aA\xrightarrow{0.6}ab$$

及

$$S\xrightarrow{0.5}AB\xrightarrow{0.4}BA\xrightarrow{0.4}AA\xrightarrow{0.5}aA\xrightarrow{0.6}ab$$

这时 $\mu_T(ab)$ 为

$$\mu_T(ab)=0.4\vee 0.4\vee 0.2\vee 0.4=0.4$$

定义 8 所谓两个模糊语法 G_1, G_2 是等价的，是指它们生成相同的模糊集,即

$$T(G_1)=T(G_2)$$

例如，容易验证例 6 的模糊语法 $G=(\{a, b\}, \{A, B,$

$S\}, S, P)$ 与模糊语法 $G'=(\{a, b\}, \{A, B, C, D\}, S', P')$ 是等价的. 这里语法 G' 的生成式如下给出

$$A\xrightarrow{0.5}AB \qquad A\xrightarrow{0.5}a$$

$$S\xrightarrow{0.8}A \qquad A\xrightarrow{0.6}b$$

$$S\xrightarrow{0.8}B \qquad B\xrightarrow{0.4}A$$

$$AB\xrightarrow{0.4}BC \qquad B\xrightarrow{0.2}a$$

$$AC\xrightarrow{1.0}BC$$

$$BC\xrightarrow{1.0}BA$$

下面考虑用代数形式来表示模糊语法的生成式，为此准备三项事.

(1) 用幂级数形式表示模糊集 T (式 (15)),即

$$T=\mu_1x_1+\mu_2x_2+\cdots$$

其中, μ_i 表示序列 x_i 的隶属度, $\mu_i=\mu_T(x_i)$

(2) 定义模糊集的连结(式 (16)), 即

$$TT'=\sum_i\sum_j(\mu_i\wedge\mu'_j)x_ix'_j$$

(3) λT 是模糊集,序列 x 的隶属度表示为[1)]

$$\mu_{\lambda T}(x)=\lambda\wedge\mu_T(x) \tag{26}$$

这里 λ 满足 $0<\lambda\leqslant 1$.

因此,模糊语法中的模糊生成式

$$\alpha\xrightarrow{\rho}\beta$$

可用下式代替. 其中 α, β 是 $V_T{}^*$ 中的模糊子集的标记.

$$\alpha=\rho\beta \tag{27}$$

这里, $\rho\beta$ 是用式 (26) 定义的序列的模糊集,即

---

1) λT 是连结 $T'T$ 中, $T'=\lambda\varepsilon$ (ε 为空序列)的情况.

$$\mu_{\rho\beta}(x) = \rho \wedge \mu_\beta(x) \qquad x \in V_{T^*} \tag{28}$$

再有，当 P 像下面这样含有左边相同的生成式时，即

$$\alpha \xrightarrow{\rho_1} \beta_1 \tag{29}$$

$$\alpha \xrightarrow{\rho_2} \beta_2 \tag{30}$$

可导出下式

$$\alpha = \rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2 \tag{31}$$

例 7 将例 6 的生成式用代数形式表达时，则成为

$$S = 0.5AB + 0.8A + 0.8B \tag{32}$$

$$AB = 0.4BA \tag{33}$$

$$A = 0.5a + 0.6b \tag{34}$$

$$B = 0.4A + 0.2a \tag{35}$$

因此，为了求出用这个语法所生成的序列的模糊集 $T(G)$，对初始符号 S 解 (32)～(35) 式即可。为此，使用式 (26)，将式 (34) 代入式 (35)，即

$$\begin{aligned} B &= 0.4(0.5a + 0.6b) + 0.2a \\ &= (0.4 \wedge 0.5)a + (0.4 \wedge 0.6)b + 0.2a \\ &= (0.4 \vee 0.2)a + 0.4b = 0.4a + 0.4b \end{aligned}$$

因此，AB 成为

$$\begin{aligned} AB &= 0.4BA \\ &= 0.4(0.4a + 0.4b)(0.5a + 0.6b) \\ &= 0.4(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) \\ &= 0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb \end{aligned}$$

因此，在求 S 时，因为 AB, A, B 是已确定的，所以

$$\begin{aligned} S &= 0.5AB + 0.8A + 0.8B \\ &= 0.5(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) \\ &\quad + 0.8(0.5a + 0.6b) + 0.8(0.4a + 0.4b) \\ &= 0.5a + 0.6b + 0.4(aa + ab + ba + bb) \end{aligned}$$

于是

$$T(G)=S$$

在解表示模糊语法的生成式的代数方程时，会遇到像下面形式的线性方程

$$u=\alpha u+\beta \tag{36}$$

这时，若 α 不含空序列，则对 u 的解由下式给出.

$$u=\alpha^{*}\beta \tag{37}$$

其中，α^{*} 是 α 的克林尼闭包.

例 8

$$u=(0.3a+0.5b)u+0.4a$$

的解由

$$u=(0.3a+0.5b)^{*}0.4a$$

给出. 若将其分解，则得

$$\begin{aligned}
u &= 0.4a+(0.3a+0.5b)0.4a \\
&\quad +(0.3a+0.5b)(0.3a+0.5b)0.4a+\cdots \\
&= 0.4a+(0.3\wedge 0.4)aa+(0.5\wedge 0.4)ba \\
&\quad +(0.3\wedge 0.3\wedge 0.4)aaa+(0.3\wedge 0.5\wedge 0.4)aba \\
&\quad +(0.5\wedge 0.3\wedge 0.4)baa+(0.5\wedge 0.5\wedge 0.4)bba+\cdots \\
&= 0.4a+0.3aa+0.4ba \\
&\quad +0.3aaa+0.3aba+0.3baa+0.4bba+\cdots
\end{aligned}$$

下面与普通的形式语言同样，由于在生成式上附加限制，因此能够分成四种类型的语法.

0 型模糊语法 该语法是指对生成式

$$\alpha\xrightarrow{\rho}\beta \tag{38}$$

完全没有限制的模糊语法. 其中 $\alpha,\beta\in(V_N\cup V_T)^{*}$，$\alpha\neq\varepsilon_1$，这种语法也称模糊构造语法.

例如，生成式

$$AB\xrightarrow{0.3}BA,\quad ABa\xrightarrow{0.5}Bb,\quad A\xrightarrow{0.8}b$$

是式(38)的例子.

1 型模糊语法 在生成式

$$\alpha\xrightarrow{\rho}\beta \tag{39}$$

中,α, $\beta\in(V_N\cup V_T)^*$, $\alpha\neq\varepsilon$, 此外, 有 $|\beta|\geqslant|\alpha|$ 的限制. 这里,$|\alpha|$ 表示序列的长度,即右边 β 的长度与左边 α 的长度相等或比左边 α 的长度长.

例如,$AB\xrightarrow{0.5}BA$ $A\xrightarrow{0.8}bb$ 等是这样,而 $BA\xrightarrow{0.9}B$ 就不是这样.

1 型模糊语法也有如下定义的.

系指生成式全是如下形式的情况.

$$\beta A\gamma\xrightarrow{\rho}\beta\alpha\gamma \tag{40}$$

其中,$A\in V_N$, α, β, $\gamma\in(V_T\cup V_N)^*$, $\alpha\neq\varepsilon$. 这意味着当 A 在 $\beta A\gamma$ 文脉中出现时,用 α 代替 A. 由于这一点,1 型模糊语法亦称文脉规定型模糊语法.

例如, $aAb\xrightarrow{0.5}abb$ $Ab\xrightarrow{0.7}bbb$ 等取式(40)的形式, 而 $AB\xrightarrow{0.3}BA$, 则不是这样. 可是,若采用新的非终极符 C, 则形如 $AB\xrightarrow{0.3}BA$ 的生成式被换成取式(40)形式的如下的生成式

$$AB\xrightarrow{0.3}AC$$

$$AC\xrightarrow{1.0}BC$$

$$BC\xrightarrow{1.0}BA$$

2 型模糊语法 该语法是指生成式取

$$A\xrightarrow{\rho}\alpha \tag{41}$$

形式的情况. 这里 $A\in V_N$, $\alpha\in(V_N\cup V_T)^*$. 这意味着与文脉无关系,不论什么时候都用 α 代替 A. 由于这一点,2 型模糊语法亦称文脉自由型模糊语法.

例如, $A\xrightarrow{0.4}aAb$, $B\xrightarrow{0.8}cA$ 等均取式(41)的形式, 而 $AB\xrightarrow{0.3}BA$ 则不是这样.

3 型模糊语法 这种语法是指生成式取

$$A\xrightarrow{\rho}aB$$

$$A\xrightarrow{\rho}a \tag{42}$$

形式的情况. 这里, A, $B\in V_N$, $a\in V_T$. 3 型模糊语法亦称正规模糊语法.

例如, $A\xrightarrow{0.5}cB$, $B\xrightarrow{0.5}a$ 取式(42)的形式,而

$$A\xrightarrow{0.7}aAb,$$

则不是这样.

方才叙述的生成式的代数形式在 2 型模糊语法的情况下特别有用.

若设 V_N 中的非终极符为 X_1, X_2, $\cdots$, X_n, $X=(X_1, X_2,\cdots, X_n)$, 则生成系 P 被换成方程

$$X=f(X) \tag{43}$$

的形式. 其中, f 是 n 对函数, 各元素是由 X_i, $i=1,2,\cdots,n$ 组成的多项式. 这样一来, 根据模糊语法求所生成的模糊集的问题就归结为找函数 f 的不动点. 现在令

$$X^{(0)}=(X_1^{(0)},\cdots,X_n^{(0)})=f(\varnothing,\cdots,\varnothing) \tag{44}$$

(其中 $\varnothing$ 为空集), 对于 $k\geqslant0$

$$\begin{aligned}X^{(k+1)}&=(X_1^{(k+1)},\ \cdots,\ X_n^{(k+1)})\\&=f(X_1^{(k)},\cdots,X_n^{(k)})\end{aligned} \tag{45}$$

最后, 对于各 $i=1,2,\cdots,n$, 若令

$$X_i = \sum_{k=0}^{\infty} X_i^{(k)} \tag{46}$$

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 成为式 (43) 的解. 这里,若设 $X_1 = S$ (初始符号),由于式 (46), 则

$$S = X_1 = \sum_{k=0}^{\infty} X_1^{(k)} \tag{47}$$

成为由模糊语法 (2 型的情况) G 所生成的模糊集 $T(G)$.

例 9 若设 2 型模糊语法为 $G = (\{a, b, c\}, \{S, A\}, S, P)$,其生成式为

$$S \xrightarrow{0.8} aSb \qquad A \xrightarrow{0.5} Sa$$

$$S \xrightarrow{0.7} cA \qquad A \xrightarrow{0.4} bA$$

$$S \xrightarrow{0.6} a \qquad A \xrightarrow{0.3} c$$

则生成系可写成如下的方程组的形式.

$$S = 0.8aSb + 0.7cA + 0.6a$$

$$A = 0.5Sa + 0.4bA + 0.3c$$

因此

$$(SA) = f(S, A)$$

$$= (0.8aSb + 0.1cA + 0.6a, 0.5Sa + 0.4bA + 0.3c)$$

首先,由式 (44) 得

$$(S^{(0)}, A^{(0)}) = f(\varnothing, \varnothing) = (0.6a, 0.3c) \tag{48}$$

在 $k = 1$ 的情况下,由式 (45) 得

$$(S^{(1)}, A^{(1)}) = f(S^{(0)}, A^{(0)})$$

$$= (0.8aS^{(0)}b + 0.7cA^{(0)} + 0.6a,$$

$$0.5S^{(0)}a + 0.4bA^{(0)} + 0.3c) \tag{49}$$

若把式 (48) 代入式 (49), 则首先得第 1 项 $S^{(1)}$

$$S^{(1)} = 0.8a(0.6a)b + 0.7c(0.3c) + 0.6a$$

$$= (0.8 \wedge 0.6)aab + (0.7 \wedge 0.3)cc + 0.6a$$

$$= 0.6a^2b + 0.3c^2 + 0.6a$$

第2项 $A^{(1)}$ 为

$$A^{(1)} = (0.5 \wedge 0.6)aa + (0.4 \wedge 0.3)bc + 0.3c$$
$$= 0.5a^2 + 0.3bc + 0.3c$$

其次是 $k = 2$ 的情况，由

$$(S^{(2)}, A^{(2)}) = f(S^{(1)}, A^{(1)})$$
$$= (0.8aS^{(1)}b + 0.7cA^{(1)} + 0.6a,$$
$$0.5S^{(1)}a + 0.4bA^{(1)} + a3c)$$

得第1项

$$S^{(2)} = 0.8a(0.6a^2b + 0.3c^2 + 0.6a)b$$
$$+ 0.7c(0.5a^2 + 0.3bc + 0.3c) + 0.6a$$
$$= 0.6a^3b^2 + 0.3c^2b + 0.6a^2b$$
$$+ 0.5ca^2 + 0.3cbc + 0.3c^2 + 0.6a$$

第2项为

$$A^{(2)} = 0.5(0.6a^2b + 0.3c^2 + 0.6a)a$$
$$+ 0.4b(0.5a^2 + 0.3bc + 0.3c) + 0.3c$$
$$= 0.5a^2ba + 0.3c^2a + 0.5a^2$$
$$+ 0.4ba^2 + 0.3b^2c + 0.3bc + 0.3c$$

同样，可求 $S^{(3)}$, $A^{(3)}$, $S^{(4)}$, $A^{(4)}$, $\cdots$. 因此，基于这个语法的模糊集 $T(G)$，可由式(47)如下给出

$$T(G) = S = S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots$$

§4. 模糊语法的分解

在这一节里，我们对模糊语法能分解为非模糊语法这一很有趣的问题进行叙述。这一事实是从下面所讲的模糊集的基本性质导出来的。

设 A 为空间 X 中的模糊集，并设对于区间 $(0, 1]$ 中的 λ,

A 的 λ-**水平集**(用 A_λ 表示)为如下定义的非模糊集。

$$A_\lambda = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \lambda\} \tag{50}$$

因此，下面的基本关系成立。

$$\lambda \geqslant \lambda' \Rightarrow A_\lambda \subseteq A_{\lambda'} \tag{51}$$

于是，模糊集合 A 可表示为

$$A = \sum_\lambda \lambda A_\lambda \tag{52}$$

这里，Σ 表示模糊集的并，λA_λ 是模糊集，是用如下取两个值的隶属函数 $\mu_{\lambda A_\lambda}$ 表示其特征的。

$$\mu_{\lambda A_\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x \in A_\lambda \\ 0 \; x \notin A_\lambda \end{cases} \tag{53}$$

现在用简单例子来说明这个事实。首先，设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，并设模糊集合 A 是用幂级数形式

$$A = 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3 + 0.8x_4 + 1.0x_5 + 1.0x_6 \tag{54}$$

表示的。这样一来，水平集可如下给出。

$$A_{1.0} = \{x_5, x_6\}$$

$$A_{0.8} = \{x_4, x_5, x_6\}$$

$$A_{0.6} = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$A_{0.5} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$A_{0.3} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

于是根据式 (52)，模糊集合 A 可表示为

$$A = 0.3A_{0.3} + 0.5A_{0.5} + 0.6A_{0.6} + 0.8A_{0.8} + 1.0A_{1.0} \tag{55}$$

其中，+表示模糊集的并，为了由式 (55) 导出式 (54)，下面将 $A_{0.3}, \cdots, A_{1.0}$ 的幂级数表示代入式 (55) 即得

$$\begin{aligned} A = {} & 0.3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & + 0.5(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & + 0.6(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & + 0.8(x_4 + x_5 + x_6) + 1.0(x_5 + x_6) \end{aligned}$$

然后利用下式

$$\lambda x_i + \lambda' x_i = (\lambda \vee \lambda') x_i \quad i = 1, 2, \cdots, 6$$

便可导出式(54)。

现在把模糊集分解的概念用于模糊语法．这里就2型的(即文脉自由型)模糊语法来叙述．同样，对于其他的0，1，3型的模糊语法也成立。

现在，设文脉自由型模糊语法为 $G = (V_T, V_N, S, P)$，并设在 P 中的模糊生成式 $\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$ 中，$\rho \geqslant \lambda$ 的生成式 $\alpha \to \beta$ 的集合为 P_λ，即

$P_\lambda = \{\alpha \to \beta | \alpha \xrightarrow{\rho} \beta \in P, \rho \geqslant \lambda\}$，其中 $\lambda \in (0, 1]$．$\alpha \to \beta$ 是指 $\alpha \xrightarrow{1.0} \beta$．由此可知

$$G_\lambda = (V_T, V_N, S, P_\lambda) \tag{56}$$

是具有生成系统 P_λ 的非模糊语法.

已知非模糊语法 G_λ 生成非模糊文脉自由型语言 $T(G_\lambda)$。因此，与模糊集能分解为水平集 A_λ 一样，模糊语言 $T(G)$ 能分解为 $T(G_\lambda)$。

现在，设 $G = (V_T, V_N, S, P)$ 为文脉自由型模糊语法，G_λ 为由式(56)定义的非模糊文脉自由型语法，则

$$T(G) = \sum_\lambda \lambda T(G_\lambda) \tag{57}$$

成立．其中，λ 是 P 中 ρ 的值．$T(G)$，$T(G_\lambda)$ 分别为由 G，G_λ 生成的模糊文脉自由型语言、非模糊自由型语言．又，$\lambda T(G_\lambda)$ 为由

$$\mu_{\lambda T(G_\lambda)}(x) = \lambda \wedge \mu_{T(G_\lambda)}(x) \tag{58}$$

定义的模糊集.

现在举一个简单的例子，设模糊语法 G 为

$$G = (\{a, b\}, \{A, B, S\}, S, P)$$

其中，P为

$$S \xrightarrow{0.8} bA \qquad B \xrightarrow{1.0} b$$

$$S \xrightarrow{0.6} aB \qquad A \xrightarrow{0.3} bSA$$

$$A \xrightarrow{1.0} a \qquad B \xrightarrow{0.3} aSB$$

由此非模糊生成系统P_λ分别如下给出。

$$P_{1.0}: \; A \to a \quad B \to b$$

$$P_{0.8}: \; A \to a \quad B \to b$$
$$S \to bA$$

$$P_{0.6}: \; A \to a \quad B \to b$$
$$S \to bA \quad S \to aB$$

$$P_{0.3}: \; A \to a \quad B \to b$$
$$S \to bA \quad S \to aB$$
$$A \to bSA \quad B \to aSB$$

所以，由模糊语法G生成的模糊语言$T(G)$，由

$$T(G) = 0.3T(G_{0.3}) + 0.6T(G_{0.6}) + 0.8T(G_{0.8}) + T(G_{1.0})$$

给出。

以上关于模糊语言的语法论就讲到这里，下面进入模糊语言的语义论。

§5. 模糊语言的语义论

现在，我们考虑已叙述过的构造的模糊语言$L=(U, S_T, E, S_N)$. 其中，S_T是给术语集合$T(\subseteq E)$附以特征的语法规则集合，U是论域，S_N是确定由E到U的模糊命名关系N的语义规则的集合. 如前所述，关于语义论的中心问题是，以T中合成术语的各元素的语义为基础，较好地给出提供计

算合成术语语义的算法的语义规则的集合. 在人工语言，特别是程序语言的情况下，语义规则是由该语言的设计者决定的，而在自然语言的情况下，必须以表示N的特征的隶属函数μ_N: $\mathrm{Supp}(T)\times U\to[0,1]$的部分信息为基础推演语义规则. 即，$S_N$必须由有限的序偶集合$\{((x_i, y_j), \mu_N(x_i, y_j))\}$进行推演，其中，$i=1, 2, \cdots, k, j=1, 2, \cdots, m$，$x_i$及$y_j$分别为$T$，$U$中的样本点，而$\mu_N(x_i, y_j)$是表示$x_i$和$y_j$关系的强度. 可是，这个推演的问题是所谓抽象化的问题，因为现在处理这个抽象化的问题的成形的方法还没有找到，所以，推演S_N和S_T的问题有必要用特殊的方法来解决. 事实上，自然语言过于复杂，S_N和S_T中的规则应取什么形式现时还不清楚. 因此，这里打算利用过去所知的自然语言与人工语言的片断知识，以特别的例子来说明模糊语言的语义论.

首先，我们考虑前面讲过的例 2.

例 10 设术语 young, old 为 $K=[0, 100]$（表示年龄)中的模糊集，是用如下隶属函数表示其特征的.

$$\mu_N(\text{young}, y)=\begin{cases}1 & y<25\\ \left(1+\left(\dfrac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & y\geqslant 25\end{cases}\tag{59}$$

$$\mu_N(\text{old}, y)=\begin{cases}0 & y<50\\ \left(1+\left(\dfrac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & y\geqslant 50\end{cases}\tag{60}$$

于是，根据§2 中的式(4)，young old 的语义 $M(\text{young})$，$M(\text{old})$ 由隶属函数

$$\mu_{M(\text{young})}(y)=\mu_N(\text{young}, y)\tag{61}$$

$$\mu_M(\text{old})(y)=\mu_N(\text{old}, y)\tag{62}$$

表示其特征(图 3).

其次，我们想用这个 young old 的语义给出 not young,

very old, young or old, not young and not old 等合成术语的语义，为此，有必要首先处理 not 及 very 等修饰词，or 及 and 等连结词. 为此，首先用 $\mathscr{F}(K)$ 表示K中的模糊集全体，即模糊幂集合. 于是，修饰词"very"可以看做是如下定义的 $\mathscr{F}(K)$ 到 $\mathscr{F}(K)$ 的函数.

$$\mu_N(\text{very } x, y) = \mu_N(x, y)^2 \qquad (63)$$

其中，x 是K中某模糊集的名称，"very$x$"是 very和 x 连结起来的合成术语. 即，"very"可看做是由K中模糊集到另外模糊集的变换的算子（图 4). 换句话说，"very"表示K中模

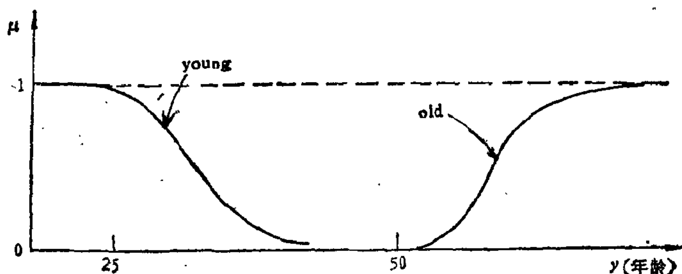


图 3 表示 young old 语义的隶属函数

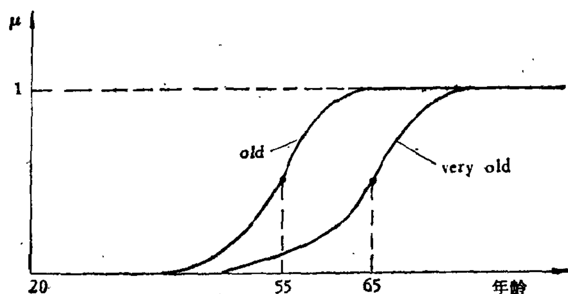


图 4 相对于 old 的，very old 的隶属函数

糊集的序偶 (x, very x)，比如 (old, very old)，(young, very young) 等的集合. 即可看做是 $\mathscr{F}(K) \times \mathscr{F}(K)$ 中的子集. 因此，若设 x = old, young, 则 very old very young 成为

$$\mu_N(\text{very old}, y) = \mu_N(\text{old}, y)^2 \tag{64}$$

$$\mu_N(\text{very young}, y) = \mu_N(\text{young}, y)^2 \tag{65}$$

它们的语义分别为 M(very old)，M(very young) (图 4).

同样地，"not" 可看做是如下定义的 $\mathscr{F}(K)$ 到 $\mathscr{F}(K)$ 的函数，即定义为

$$\mu_N(\text{not}x, y) = 1 - \mu_N(x, y) \tag{66}$$

因此，若设 x = old, young, 则有

$$\mu_N(\text{not old}, y) = 1 - \mu_N(\text{old}, y) \tag{67}$$

$$\mu_N(\text{not young}, y) = 1 - \mu_N(\text{young}, y) \tag{68}$$

其次，我们考虑连结词 and, or. 首先，术语 or 可看做是函数 $\mathscr{F}(K) \times \mathscr{F}(K) \to \mathscr{F}(K)$. 若设 x_1, x_2 为术语，则合成术语 x_1 or x_2 的语义是

$$M(x_1 \text{ or } x_2) = M(x_1) \cup M(x_2) \tag{69}$$

如用隶属函数表示，则为

$$\mu_N(x_1, \text{ or } x_2, y) = \mu_N(x, y) \vee \mu_N(x_2, y) \tag{70}$$

同样，术语 and 是函数 $\mathscr{F}(K) \times \mathscr{F}(K) \to \mathscr{F}(K)$，起交集的作用. 因此，合成术语 x_1 and x_2 的语义成为

$$M(x_1 \text{ and } x_2) = M(x_1) \cap M(x_2) \tag{71}$$

用隶属函数

$$\mu_N(x_1 \text{ and } x_2) = \mu_N(x_1, y) \wedge \mu_N(x_2, y) \tag{72}$$

表示其特征.

可是，"x_1 and x_2" 的语义像用式 (71) 所定义的那样，是 K 中的模糊集，而 "and" 的语义则是 $\mathscr{F}(K) \times \mathscr{F}(K)$ 中的模糊集. 因此，为把 young, old not, or, and 等术语定义为

论域U中的模糊集，只用K是不够的，有必要把$\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)$及$\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)$等的集合加进去. 即有必要使$U$为

$$U=K+\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)+\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K) \tag{73}$$

其中，+表示并集，×表示直积.

可是，在英语中，连结词“and”也有在与前面所定义的不同的语义上使用的. 例如，在英语“the box contains nuts and bolts”（这箱子装有螺帽和螺钉）里，“and”不是表示物（nuts 与 bolts）的集合的交集，而是表示并集. 像这样，文章的语义依赖于文脉，即依赖于文章的前后关系，是自然语言的特点，而且也是难点.

为了处理合成术语的语义，用语法范畴(相当于名词，形容词，名词短语等的语法用语)代表术语进行处理是方便的. 例如，所谓“名词”这一语法范畴，代表 dog, cat, door, car, ···, 而 red, tall, young, old, narrow 等含在所谓“形容词”这个语法范畴里.

设x_1为形容词，x_2为名词，而且若设x_1, x_2的语义分别为$M(x_1)$, $M(x_2)$, 则合成术语x_1x_2的语义表示为$M(x_1)$与$M(x_2)$的交集. 即，

$$M(x_1x_2)=M(x_1)\cap M(x_2) \tag{74}$$

例如，设U为某个房间里的东西的集合，并设$x_1=$ red, $x_2=$ chair, 则$M(x_1)$是房间里红色东西的模糊集，$M(x_2)$是房间里椅子的集合，$M(x_1x_2)$是房间里红色椅子（red chair）的模糊集. 由式(74)，若设在红色东西的模糊集中“某”物的隶属度为0.8，在椅子集合中隶属度为1，则在 red chair 的模糊集中，“某”物的隶属度为$0.8\wedge1.0=0.8$. 若“某”物是“蓝椅子”，则在 red chair 的模糊集中，隶属度为$0\wedge1.0=0$.

在上例，$x_1 \in$ 形容词，$x_2 \in$ 名词的情况中，$x_1 x_2$ 的语义 $M(x_1x_2)$ 可认为是 $M(x_1)$ 和 $M(x_2)$ 的子集，即

$$M(x_1x_2) \subseteq M(x_1), M(x_2) \tag{75}$$

可是，当 x_1 是形容词以外的语法范畴的元素时，就不一定是这样。例如，若设 $x_1 =$ ran 这一动词，$x_2 =$ home，则 $M(x_1)$ 成为行动集合中的模糊集合 A，$M(x_2)$ 为东西集合中的模糊集合 O。这时，语义 M(ran home) 不是 A 和 O 的子集，而是 A 和 O 的直积 $A \times O$ 中的模糊集。

其次，再稍微详细地叙述一下计算命名函数 $\mu_N(x, y)$ 的算法，这个命名函数是表示合成术语语义的。先对合成术语 x 用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示的情况进行叙述，然后对合成术语是由某语法 G 所生成的情况进行叙述。

首先，设合成术语 x 用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示，各 x_i 是原子术语，是用隶属函数 $\mu_i(y) = \mu_N(x_i, y)$，$y \in U$ 表示的。例如，虽然没什么实际意义，但为了论述计算的方法，举如下的例子。设各 x_i 是合订卡片 (old, tall, 15, very, fat) 中记录的属性，即 $x_1 =$ old，$x_2 =$ tall，$x_3 = 15$，$x_4 =$ very，$x_5 =$ fat。为简单起见，设 U 为实轴，y 的函数 $\mu_N(x, y)$ 的计算程序对于各 $y \geqslant x_3$ 取如下的形式。

1° 若 $x_4 =$ very，则 $z_1 = \mu_5(y)^2$，
若 $x_4 =$ 空，则 $z_1 = \mu_5(y)$

2° $z_2 = z_1 \vee \mu_2(y)$

3° $z_3 = \mu_1(y) \wedge z_2$

4° $\mu_N(x, y) = z_3(1 + (y - x_3)^2)^{-1}$

如果使用 λ-记法，则这个计算程序可表示为

$$\mu_N(x, y) = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)[(\mu_N(x_1, y) \wedge (\mu_N(x_2, y) \vee \mu_N(x_5, y)^{r(x_4)}))(1 + (y - x_3)^2)^{-1}]$$

$$[\text{old}, \text{tall}, 15, \text{very}, \text{fat}] \tag{76}$$

这里，若 $x_4=$ 空，则 $r(x_4)=1$，若 $x_4=\text{very}$，则 $r(x_4)=2$.

现在说明一下λ-记法. 若 e 是表示函数形式的式子，则用

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=e$$

定义的函数 f 表现为

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)[e]$$

$x_i=a$ 时的 f 值 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 用

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)[e][a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

表示. 例如，$f(x,y)=x^2+y$ 时

$$f=\lambda(x, y)[x^2+y]$$

$x=2$, $y=6$ 时的函数值为

$$\lambda(x, y)[x^2+y][2, 6]=10$$

其次，我们来叙述合成术语 x 是由语法 G 生成的情况的 $\mu_N(x, y)$ 的计算.

首先，设 T 中的原子术语(非终极符)是 young, old, very, not, and, (,),合成术语是由如下的语法生成的. 这里 S, A, B, C, O, Y 是非终极符，生成式可如下给出.

$$\begin{array}{ll} S \to A & C \to O \\ S \to S\text{or}A & C \to Y \\ A \to B & O \to \text{very}O \\ A \to A\text{and}B & Y \to \text{very}Y \\ B \to C & O \to \text{old} \\ B \to \text{not}C & Y \to \text{young} \\ C \to (S) & \end{array} \tag{77}$$

于是，像合成术语 "not very young and not very very old" 可按如下的导出法生成

$$S \to A \to A\text{and}B \to B\ \text{and}B \to \text{not}C\text{and}\ B$$
$$\to \text{not}\ Y\ \text{and}\ B \to \text{not}\ \text{very}\ Y\ \text{and}B$$

$\rightarrow$ not very young and B

$\rightarrow$ not very young and not C

$\rightarrow$ not very young and not O

$\rightarrow$ not very young and not very O

$\rightarrow$ not very young and not very very O

$\rightarrow$ not very young and not very very old

此外，也可生成如下的合成术语

not very young

not very young and not very old

young and not old

old or not very very young

young and (old or not young)

由此对由语法G所生成的合成术语x计算$\mu_N(x, y)$. 作为假定，设对于原子术语 young, old, 预先定义了μ_N(young, y), μ_N(old, y). 其他的 very, not, and 等的原子术语，像先前叙述的那样，可看做是$\mathscr{F}(K)$或$\mathscr{F}(K)\times\mathscr{F}(K)$上的函数，是用如下定义的语义规则表示上面生成式的特征的. 在下面，足码L, R是为了与生成式的左边，右边里的终极符区别对非终极符附加的. 还有，$\mu(H)$是$\mu_N(H, y)$的略写，H表示终极符或非终极符. 于是，规则可如下给出.

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow A &&\Rightarrow \mu(S_L) = \mu(A_R) \\
&A \rightarrow B &&\Rightarrow \mu(A_L) = \mu(B_R) \\
&B \rightarrow C &&\Rightarrow \mu(B_u) = \mu(C_R) \\
&S \rightarrow S \text{ or} A &&\Rightarrow \mu(S_L) = \mu(S_R) V \mu(A_R) \\
&A \rightarrow A \text{and} B &&\Rightarrow \mu(A_L) = \mu(A_R) \wedge \mu(B_R) \\
&B \rightarrow \text{not} C &&\Rightarrow \mu(B_L) = 1 - \mu(C_R) \\
&O \rightarrow \text{very } O &&\Rightarrow \mu(O_L) = (\mu(O_R))^2 \\
&Y \rightarrow \text{very} Y &&\Rightarrow \mu(Y_L) = (\mu(Y_R))^2
\end{aligned}
\tag{78}
$$

$$C \to 0 \qquad \Rightarrow \mu(C_L) = \mu(O_R)$$
$$C \to Y \qquad \Rightarrow \mu(C_L) = \mu(Y_R)$$
$$C \to (S) \qquad \Rightarrow \mu(C_L) = \mu(S_R)$$
$$O \to \text{old} \qquad \Rightarrow \mu(O_L) = \mu(\text{old})$$
$$Y \to \text{young} \quad \Rightarrow \mu(Y_L) = \mu(\text{young})$$

现在考虑下面的合成术语。

x = not very young and not very very old 对这种简单术语的情况，使用前面叙述过的 not，very 等的约定，则 $\mu_N(x, y)$ 变成下面形式。

$$\mu_N(x, y) = (1 - \mu_N^2(\text{young}, y)) \wedge (1 - \mu_N^4(\text{old}, y)) \quad (79)$$

若要求出这个式子当然要使用上面所求的语义规则。为

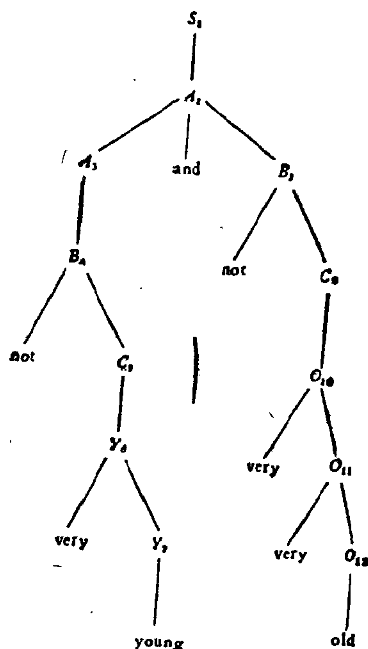


图 5　对 x = not very young and not very very old 的语法树

了说明这一点，首先有必要构造 x 的语法树. 使用方才所述的 x 的导出，可像图 5 那样给出. 这里的足码是给树的各节点附加号码的.

现在，从树的下边到上边实行为计算各节点的隶属函数的上述语义规则,得到如下的非线性方程

$$
\begin{aligned}
\mu(Y_7) &= \mu_N(\text{young}, y) \\
\mu(Y_6) &= \mu^2(Y_7) \\
\mu(C_5) &= \mu(Y_6) \\
\mu(B_4) &= 1 - \mu(C_5) \\
\mu(A_3) &= \mu(B_4) \\
\mu(O_{12}) &= \mu_N(\text{old}, y) \\
\mu(O_{11}) &= \mu^2(O_{12}) \\
\mu(O_{10}) &= \mu^2(O_{11}) \\
\mu(C_9) &= \mu(O_{10}) \\
\mu(B_8) &= 1 - \mu(C_9) \\
\mu(A_2) &= \mu(A_3) \wedge \mu(B_8) \\
\mu_N(x, y) &= \mu(S_1) = \mu(A_2)
\end{aligned}
\tag{80}
$$

从上边依次将这些方程代入，便可得式 (79). 这样，在模糊语言中,计算合成术语 x 的语义的语义规则 (78) 可从生成 x 的语法规则 (77) 导出,这是很有趣的.

关于模糊语言的研究可以说刚刚开始，应当解决的问题还很多，但是，可以相信模糊语言的理论在自然语言、信息检索的质问语言的分析中,还有在模糊算法、模糊程序的形式化中,一定会起着重要的作用.

第十一章　模糊意向判决

现实中多数的意向判决都是在目标、约束、一系列行动等没有准确规定的环境下进行的. 通常，为了将这种不准确性做定量处理，要利用概率论，特别是判决理论、控制论、信息论等工具. 虽然在不准确性是由物理的原因而引起的时候，可以用概率论等传统方法进行某种程度的恰当处理，但是，在社会系统、管理系统等软系统中，还必须处理基于人的主观而有的意向及行动的不准确性，因而还有不能用传统方法很好处理的情况.

现在，我们用模糊集的概念，对于不确切的意向、行动、目标、约束、判决等带有模糊特征的意向判决问题，即**模糊意向判决**问题进行说明.

§1. 模糊意向判决

通常，在处理意向判决问题时，必须考虑判决过程中的下面3个基本事项，即

(1)　手段集合.

(2)　选择各手段时的约束集合.

(3)　对所选手段分配赢得(或损失)的评价函数.

为了讨论模糊意向判决，下面介绍模糊目标、模糊约束、模糊判决等3个概念.

若设 $X=\{x\}$ 为手段集合，则所谓**模糊目标**就定义为 X 的某个模糊集 G. 比如，模糊目标“x 应比10大得多”可用

$X = R$（实数轴）上的模糊集表示，比如，可用如下隶属函数表示其特征.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-10)^2}}, & x \geqslant 10 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

同样，模糊目标"x 应在 15 左右"可用隶属函数

$$\mu_G(x) = \frac{1}{1 + (x-15)^4} \tag{2}$$

表示其特征.

可是，我们知道，判决过程中的评价函数，是根据评价给手段赋予顺序的，而模糊目标的隶属函数 μ_G 也起同样作用. 事实上，若给了评价函数，则将其正规化，便得隶属函数.

同样，也可把**模糊约束** C 看做是 X 上的模糊集. 比如，约束 "x 应近似地在 2 与 10 之间" 可看做是模糊约束，可用如下隶属函数表示其特征.

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1 + a(x-6)^m} \tag{3}$$

其中，a 为正数，m 为适当选择的正偶数. 比如，若设 $m = 4$，$a = 5^{-4}$，则在 $x = 2$，$x = 10$ 时，$\mu_C(x) = 0.71$，在 $x = 1$，$x = 11$ 时，$\mu_C(x) = 0.5$，又 $x=0$，$x=12$ 时，$\mu_C(x) = 0.32$.

在模糊目标、模糊约束的定义中应当注意的是，不论哪一个都是定义为手段空间上的模糊集，这使得与后边定义的模糊判决的概念用同一标准进行处理成为可能. 可是，在普通的意向判决理论中，约束集合定义为手段空间 X 的子集，而评价函数表示为由 X 到另外集合的函数. 不过在通常的情况下，可以使用拉格朗日乘数等方法说明评价函数与约束有本质的类似之点.

现在，设模糊目标 G 与模糊约束 C 表示如下。

G："x 应比 10 大得多"

且

C："x 应在 15 左右"

其中，G，C 分别用式(1)，(2)的隶属函数 μ_G，μ_C 表示其特征。

因为 G 与 C 是用"且"连结词连结起来的，所以选择手段时，模糊目标 G 与模糊约束 C 的影响可表示为 G 与 C 的交集 $G \cap C$。即

$$\mu_{G\cap C}(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x) \tag{4}$$

详细说就是表示为

$$\mu_{G\cap C}(x) = \begin{cases} \min\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-10)^2}}, \dfrac{1}{1+(x-15)^4}\right], & x \geqslant 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases} \tag{5}$$

而所谓判决，基本上是选择有效的手段，或者表示选择的集合。因此，所谓**模糊判决** D 就可用模糊目标 G 和模糊约束 C 的交集来表示，即

$$D = G \cap C \tag{6}$$

换言之就是

$$\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C \tag{7}$$

此形式表示在图 1 中。

一般地来说，若设给出了 n 个模糊目标 G_1，G_2，$\cdots$，G_n 及 m 个模糊约束 C_1，C_2，$\cdots$，C_m，则模糊判决可作为它们的交集给出。即

$$D = G_1 \cap \cdots \cap G_n \cap C_1 \cap \cdots \cap C_m \tag{8}$$

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{C_m} \tag{9}$$

例如，我们考虑在 $X=\{1,2,\cdots,10\}$ 中，模糊目标 G_1，G_2 模糊约束 C_1，C_2 如表 1 给出的情况．如果取表 1 中 μ_{G_1}，μ_{G_2}，μ_{C_1}，μ_{C_2} 的极小值 (min)，则 $\mu_D(x)$ 可用表 2 给出．因此，模糊判决 D 可用如下模糊集给出．

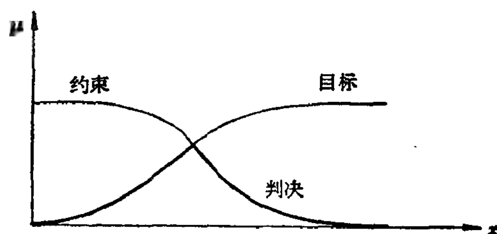


图 1　模糊目标，模糊约束，模糊判决间的关系

表1　模糊目标 G_1，G_2，模糊约束 C_1，C_2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μG_1	0	0.1	0.4	0.8	1.0	0.7	0.4	0.2	0	0
μG_2	0.1	0.6	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3	0	0
μC_1	0.3	0.6	0.9	1.0	0.8	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1
μC_2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2

表 2　模糊判决 D

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μD	0	0.1	0.4	0.7	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0

$$D=\{(2,0.1),(3,0.4),(4,0.7),(5,0.8),(6,0.6),(7,0.4),(8,0.2)\} \qquad (10)$$

若把上述的模糊目标 G_1，G_2 及模糊约束 C_1，C_2 用如下句子来表示，即若

G_1：“x 应接近于 5”

G_2: “x 应接近于 3”

C_1: “x 应接近于 4”

C_2: “x 应接近于 6”

则模糊判决 D 成为

D:“选择接近于 5 的 x”

可是,“选择接近于 5 的 x”这样的命令怎样实行合适呢?遗憾的是,对于实行这种模糊命令还没有给出满意的解答.不过,多数情况下,认为在 D 中选择具有最大隶属度的手段 x 是合适的. 在上例中即是 $x=5$.

更一般地,若设 D 为模糊判决,D^M 为使 μ_D 取最大值的 X 中的点集,则 D^M 中的点 x 称为最大判决. 即,最大判决表示使 μ_D 达到最大的手段 x. 在上例中,可以说 $x=5$ 是最大判决.

模糊判决在定义中是以模糊目标与模糊约束的交集[1]来表示的,这时是默默地假定了目标与约束在某种意义下是同样重要的. 如果其中一方是重要时,则模糊判决 D 表现为模糊目标与模糊约束的凸组合,其重要程度可用加权系数表现出来. 即,将 μ_D 如下表示.

$$\mu_D(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\mu_{G_i}(x)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(x)\mu_{C_j}(x) \qquad (11)$$

其中,α_i, β_j 是满足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(x)=1 \qquad (12)$$

的隶属函数,值 $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ 是给出各模糊目标 $G_1, \cdots, G_n$, 各模糊约束 $C_1, \cdots, C_m$ 的重要性的.

1) 此外,模糊判决有用模糊目标和模糊约束的代数积 ($\mu_D=\mu_G\cdot\mu_C$) 或代数和 ($\mu_D=\mu_G+\mu_C-\mu_G\mu_C$) 等其他运算表示的. 即把模糊判决看做是模糊目标和模糊约束的合流.

迄今为止，不论是模糊目标，还是模糊约束，都是作为手段空间X上的集合来表现的．作为更一般的情况，我们来考虑模糊目标、模糊约束是在不同的空间上定义的情形．设有映射$f: X \to Y$，$x \in X$表示输入(原因)，$y(=f(x))$表示对应的输出(结果)．那么，模糊约束$C_1, \cdots, C_m$是X中的集合，模糊目标$G_1, \cdots, G_n$是Y中的集合．这样一来，用映射$f: X \to Y$，对于Y中的模糊集G_i，能够找到X中的模糊集$\bar{G}_i$．即

$$\mu_{\bar{G}_i}(x) = \mu_{G_i}(f(x)) \tag{13}$$

因此，模糊判决D可作为$\bar{G}_1, \cdots, \bar{G}_n, C_1, \cdots, C_m$的交集给出．详细说则是如下给出．

$$\begin{aligned}\mu_D(x) = \mu_{G_1}(f(x)) \wedge \cdots \wedge \mu_{G_n}(f(x)) \\ \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mu_{C_m}(x)\end{aligned} \tag{14}$$

这样，既使模糊目标、模糊约束是在不同的空间里定义的，然而还可使其在同一空间里再定义．

§2. 多段判决过程

现在我们把前面所叙述的模糊目标、模糊约束、模糊判决等三个概念应用到多段判决过程中去．

首先，为简单起见，设所考虑的系统A是时间不变、有限状态、确定性的系统．即假定，在时刻$t = 0, 1, \cdots$的状态x_t包含在状态集合$X = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$中，输入$u_t$包含在输入集合$U = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$中，而系统$A$是用状态方程

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{15}$$

描述的．其中，f是状态转移函数$X \times U \to X$．如果f是随机函数，则系统A成为概率系统，如果f是模糊函数，则系统A成为模糊系统．不过，这里不讨论模糊系统．

设在时刻 t 给予系统 A 的输入 u_t 是从属于模糊约束 C^t 的. 这里 C^t 是 U(＝输入集合)中的用隶属函数 $\mu_t(u_t)$ 表示其特征的模糊集. 而模糊目标是 X (＝状态集合) 中的用隶属函数 $\mu_G^N(x_N)$ 表示其特征的模糊集合 G^N. 其中,N是过程的终止时刻.

设控制下的系统是用式 (15) 表示其特征的离散的确定性系统,而终止时刻N是已确定的. 另外,初始状态 x_0 是已知的. 那么,使用式(8),模糊判决D可作为 $U\times U\times\cdots\times U$ 中的**可分解**模糊集[1]

$$D=C^0\cap C^1\cap\cdots\cap C^{N-1}\cap\bar{G}^N \tag{16}$$

而给出. 这里 $\bar{G}^N$ 是引致X 中模糊目标 G^N 的 $U\times U\times\cdots\times U$ 中的模糊集. 式 (16) 可表为

$$\mu_D(u_0,\cdots,u_{N-1})=\mu_0(u_0)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_G^N(x_N) \tag{17}$$

这里,由于重复使用式 (15),状态 x_N 可以表示为状态 x_0 与输入 $u_0,\cdots,u_{N-1}$ 的函数.

于是,问题是寻找使得式 (17) 给出的 μ_D 达到最大的输入序列 $u_0,\cdots,u_{N-1}$. 现在利用在普通多段判决过程中所用的策略函数 π_t,用下面的形式表示其解.

$$u_t=\pi_t(x_t)\qquad t=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{18}$$

其中,π_t 是函数 $X\to U$.

现在,我们用动态规划法,求π_t和最大判决 $u_0^M,\cdots,u_{N-1}^M$. 依题意,用式 (15), (16) 可把 μ_D 写成

---

1) 设 $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$, A, B, C 分别为 X, Y, $X\times Y$ 中的模糊集,它们是用隶属函数 $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$, $\mu_C(x,y)$ 表示其特征的. 这时,所谓C是**可分解**的,意即

$$C=A\cap B$$

即 $\mu_C(x,y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$

换言之,就是 A, B 为 $X\times Y$ 中的圆柱模糊集.

$$\mu_D(u_0^M, \cdots, u_{N-1}^M)$$
$$= \max_{u_0, \cdots, u_{N-1}} \mu_D(u_0, \cdots, u_{N-1})$$
$$= \max_{u_0, \cdots, u_{N-1}} [\mu_0(u_0) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_G^N(x_N)]$$
$$= \max_{u_0, \cdots, u_{N-2}} \max_{u_{N-1}} [\mu_0(u_0) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-2}(u_{N-2}) \wedge$$
$$\mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_G^N(f(x_{N-1}, u_{N-1}))] \tag{19}$$

这里，$f(x_{N-1}, u_{N-1}) = x_N$.

可是，若设 γ 为常数，g 为 u_{N-1} 的函数，则一般地下式成立.

$$\max_{u_{N-1}} [\gamma \wedge g(u_{N-1})] = \gamma \wedge \max_{u_{N-1}} g(u_{N-1}) \tag{20}$$

因此，式 (19) 可进而改写如下.

$$\mu_D(u_0^M, \cdots, u_{N-1}^M)$$
$$= \max_{u_0, \cdots, u_{N-2}} [\mu_0(u_0) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-2}(u_{N-2}) \wedge \mu_G^{N-1}(x_{N-1})] \tag{21}$$

这里，

$$\mu_G^{N-1}(x_{N-1}) = \max_{u_{N-1}} [\mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_G^N(f(x_{N-1}, u_{N-1}))] \tag{22}$$

G^{N-1} 是 $t = N - 1$ 时的模糊目标，是由 $t = N$ 时的模糊目标 G^N 导出来的. 这样，由后往前进行重复，可得如下的递推公式

$$\mu_G^{N-i}(x_{N-i}) = \max_{u_{N-i}} [\mu_{N-i}(u_{N-i}) \wedge \mu_G^{N-i+1}(x_{N-i+1})] \tag{23}$$

其中，

$$x_{N-i+1} = f(x_{N-i}, u_{N-i}) \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{24}$$

由此便可得所求的解. 即，最大判决 $u_0^M, \cdots, u_{N-1}^M$ 可由使式 (23) 达到最大的 u_{N-i} $(i = 1, \cdots, N)$ 得到.

例 1 考虑如下的系统. 设状态集合为 $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，输入集合为 $U = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，表 3 是表现 f 的状态转移表，图 2

表 3 状态转移表

x_t \ u_t	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2
σ_2	σ_3	σ_1
σ_3	σ_1	σ_3

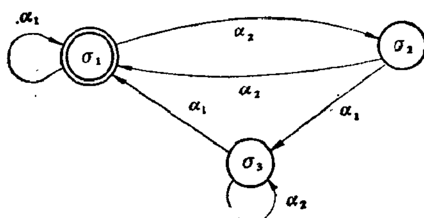


图 2 状态转移图

是状态转移图。为简单起见，设 $N=2$，在时刻 $t=2$ 时的模糊目标如下给出（图 3）。

$$\mu_{G^2}(\sigma_1)=0.3,\ \mu_{G^2}(\sigma_2)=1,\ \mu_{G^2}(\sigma_3)=0.8$$

而且设 $t=0$，1 时的模糊约束为（图 4）

$$\mu_0(\alpha_1)=0.7,\quad \mu_0(\alpha_2)=1$$

$$\mu_1(\alpha_1)=1,\quad \mu_1(\alpha_2)=0.6$$

因为模糊目标 G^2 和模糊约束 μ_1 已知，所以可用式 (22) 或 (23) 导出 $t=1$ 时的模糊目标 G^1。首先，由式 (22)，若取 $N=2$，可得下式。

$$\mu_{G^1}(x_1)=\max_{u_1}[\mu_1(u_1)\wedge\mu_{G^2}(f(x_1,u_1))] \tag{25}$$

其中 x_1，u_1 分别是 $t=1$ 时的状态、输入，$x_1\in\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，$u_1\in\{\alpha_1,\alpha_2\}$。首先考虑 $x_1=\sigma_1$ 的情形。由式 (25) 有

$$\mu_{G^1}(\sigma_1)=[\mu_1(\alpha_1)\wedge\mu_{G^2}(f(\sigma_1,\alpha_1))]$$
$$\vee[\mu_1(\alpha_2)\wedge\mu_{G^2}(f(\sigma_1,\alpha_2))]$$

$$= [1 \wedge 0.3] \vee [0.6 \wedge 1]$$

$$= 0.3 \vee 0.6 = 0.6$$

$$\vdots$$

$$\alpha_2$$

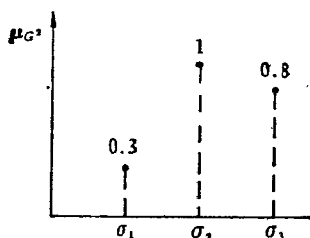


图3　$t = 2$ 时的模糊目标 G^t

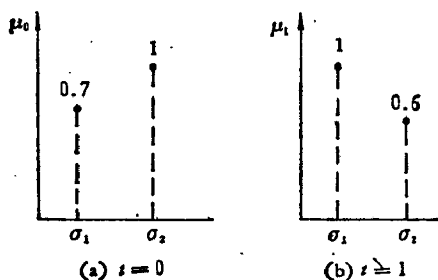


图4　$t = 0$，1 时的模糊约束 μ_0，μ_1

因此，最大判决为 α_2，写成 $\pi_1(\sigma_1) = \alpha_2$. 同样，考虑 $x_1 = \sigma_2$ 的情形。

$$\mu_{G^1}(\sigma_2) = [\mu_1(\alpha_1) \wedge \mu_{G^2}(f(\sigma_2, \alpha_1))]$$
$$\vee [\mu_1(\alpha_2) \wedge \mu_{G^2}(f(\sigma_2, \alpha_2))]$$
$$= [1 \wedge 0.8] \vee [0.6 \wedge 0.3]$$
$$= 0.8 \vee 0.3 = 0.8$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1$$

最大判决为 α_1，$\pi_1(\sigma_2)=\alpha_1$. 再考虑 $x_1=\sigma_3$ 的情形，由于

$$\begin{aligned}\mu_{G^1}(\sigma_3)&=[\mu_1(\alpha_1)\wedge\mu_{G^2}(f(\sigma_3,\alpha_1))]\\&\quad\vee[\mu_1(\alpha_2)\wedge\mu_{G^2}(f(\sigma_3,\alpha_2))]\\&=[1\wedge 0.3]\vee[0.6\wedge 0.8]\\&=0.3\vee 0.6=0.6\\&\quad\vdots\\&\quad\alpha_2\end{aligned}$$

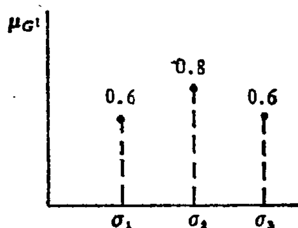
得 $\pi_1(\sigma_3)=\alpha_2$.

因此，$t=1$ 时的模糊目标 G^1 用

$$\mu_{G^1}(\sigma_1)=0.6,\quad \mu_{G^1}(\sigma_2)=0.8,\quad \mu_{G^1}(\sigma_3)=0.6$$

给出(参考图 5)，对应的最大判决为

$$\pi_1(\sigma_1)=\alpha_2,\quad \pi_1(\sigma_2)=\alpha_1,\quad \pi_1(\sigma_3)=\alpha_2$$



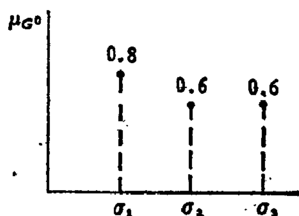


图 5　$t=1$ 时的模糊目标 G^1　　图 6　$t=0$ 时的模糊目标 G^0

同样，$t=0$ 时的模糊目标 G^0 可由下式求得.

$$\mu_{G^0}(x_0)=\max_{u_0}[\mu_0(u_0)\wedge\mu_{G^1}(f(x_0,u_0))]$$

其中，$x_0\in\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，$u_0=\{\alpha_1,\alpha_2\}$. 首先，由于

$$\begin{aligned}\mu_{G^0}(\sigma_1)&=[\mu_0(\alpha_1)\wedge\mu_{G^1}(f(\sigma_1,\alpha_1))]\\&\quad\vee[\mu_0(\alpha_2)\wedge\mu_{G^1}(f(\sigma_1,\alpha_2))]\\&=[0.7\wedge 0.6]\vee[1\wedge 0.8]\\&=0.6\vee 0.8=0.8\\&\quad\vdots\\&\quad\alpha_2\end{aligned}$$

所以对应的最大判决为 α_2，$\pi_0(\sigma_1)=\alpha_2$. 由于

$$\begin{aligned}\mu_{G^0}(\sigma_2) &= [0.7 \wedge 0.6] \vee [1 \wedge 0.6] \\ &= \underset{\alpha_1}{0.6} \vee \underset{\alpha_2}{0.6} = 0.6\end{aligned}$$

所以最大判决为 α_1，α_2 中的一个，$\pi_0(\sigma_2)=\alpha_1$ 或 α_2. 同样，

$$\begin{aligned}\mu_{G^0}(\sigma_3) &= [0.7 \wedge 0.6] \vee [1 \wedge 0.6] \\ &= \underset{\alpha_1}{0.6} \vee \underset{\alpha_2}{0.6} = 0.6\end{aligned}$$

得 $\pi_0(\sigma_3)=\alpha_1$ 或 α_2.

因此，$t=0$ 时的模糊目标 G^0 为

$$\mu_{G^0}(\sigma_1)=0.8,\ \mu_{G^0}(\sigma_2)=0.6,\ \mu_{G^0}(\sigma_3)=0.6$$

(参考图 6)，对应的最大判决由

$$\pi_0(\sigma_1)=\alpha_2,\ \pi_0(\sigma_2)=\alpha_1 \text{ 或 } \alpha_2,\ \pi_0(\sigma_3)=\alpha_1 \text{ 或 } \alpha_2 \text{ 给出.}$$

因此，若设初始状态 ($t=0$) 为 σ_1，则最大判决序列为 $\alpha_2\alpha_1$，由于 $\mu_{G^2}(\sigma_1)=0.8$，所以对应的最大值是 0.8. 若设初始状态为 σ_2，则最大判决序列为 $\alpha_1\alpha_2$ 或 $\alpha_2\alpha_1$，最大值在两种情况下都是 0.6.

上面我们讲述了以模糊环境下某个确定性系统为基础的多段判决过程，现在，我们考虑以概率系统为基础的情况.

设概率系统 A 为

$$A=(X,U,p) \tag{26}$$

这里，$X=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$ 为状态集合，$U=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 为输入集合，p 为条件概率

$$p(x_{t+1}/x_t,u_t) \tag{27}$$

称其为**状态转移概率**. 其中，x_t，$x_{t+1}\in X$，$u_t\in U$，$t=0,1,2,\cdots$. 式 (27) 表示当时刻 t 的状态为 x_t，输入为 u_t 时，下一

个时刻 $t+1$ 转为状态 x_{t+1} 的概率. 显然,

$$\sum_{x_{t+1}\in X} p(x_{t+1}/x_t, u_t) = 1 \tag{28}$$

因为是用这个概率系统讨论多段判决过程的，所以问题是,在模糊约束 $C^0, C^1, \cdots, C^{N-1}$ 下,使完成时刻N的模糊目标 G^N 的概率达到最大。

作为准备,先简单说明一下**模糊事件**的概率. 一般地,若设 R^n 为 n 维欧氏空间，所谓 R^n 中的模糊集合 A 为模糊事件，是指表示其特征的隶属函数 μ_A 为波赖尔可测. 这样，模糊事件 A 的概率用

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{R^n} \mu_A(x) dP \\ &= E(\mu_A) \end{aligned} \tag{29}$$

表示. 即,把模糊事件 A 的概率看做是 μ_A 的期望值. 简单的情况是 $n=1$, $dP/dx = p(x)$ 的情况,这时,上式表示为

$$P(A) = \int_R \mu_A(x) p(x) dx \tag{30}$$

在离散情况下,则成为

$$P(A) = \sum_x \mu_A(x) p(x) \tag{31}$$

下面我们举一个简单的例子. 设某个学生来到学校的概率分布已知如图 7. 我们来求该生“9 点左右”来到的概率. 这时，设所谓“9 点左右”的模糊集已知如图 8. 于是，“9 点左右”来到的概率由下式给出.

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_x \mu_A(x) p(x) \\ &= 0.1 \times 0.03 + 0.4 \times 0.04 + \\ &\quad 1 \times 0.07 + 0.4 \times 0.1 + 0.1 \times 0.2 \\ &= 0.149 \end{aligned}$$

现在再回到原来的问题上. 若设时刻N的模糊目标 G^N

为状态集合X中的模糊事件，则当时刻$N-1$的状态x_{N-1}，输入u_{N-1}已知时的模糊事件G^N的条件概率由下式给出。

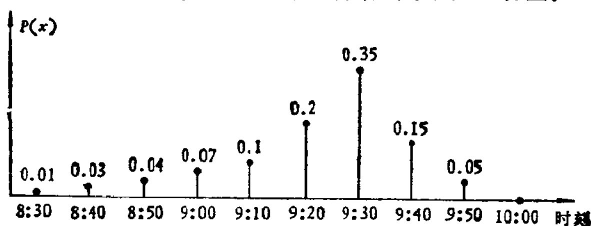


图7　某学生来到学校的概率分布

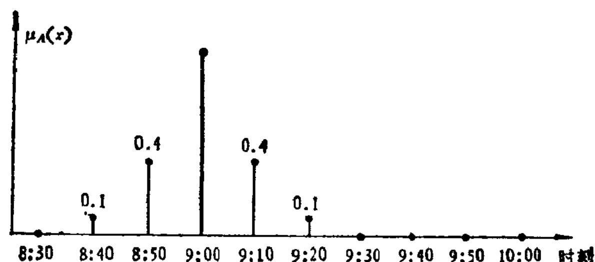


图8　表示“9点左右”的模糊集

$$P(G^N/x_{N-1},u_{N-1})=E[\mu_G{}^N(x_N)]$$
$$=\sum_{x_N}\mu_G{}^N(x_N)p(x_N/x_{N-1},u_{N-1}) \qquad (32)$$

在前面讲过的确定性系统的情况下，通过式(15)，也就是通过$x_N=f(x_{N-1},u_{N-1})$，$\mu_G{}^N(x_N)$可表示成为x_{N-1}，u_{N-1}的函数。同样，式(32)的$P(G^N/x_{N-1},u_{N-1})$，即条件期望值$E[\mu_G{}^N(x_N)]$也被表示为x_{N-1}，u_{N-1}的函数。因此，可以与在确定性系统中处理$\mu_G{}^N(x_N)$的方法完全同样地处理$E[\mu_G{}^N(x_N)]$。所以，可以由确定性系统情况下的递推式(23)，(24)，给出如下的概率系统情况下的递推式

$$\mu_G{}^{N-i}(x_{N-i}) = \max_{u_{N-i}}[\mu_{N-i}(u_{N-i}) \wedge E[\mu_G{}^{N-i+1}(x_{N-i+1})]] \tag{33}$$

其中，

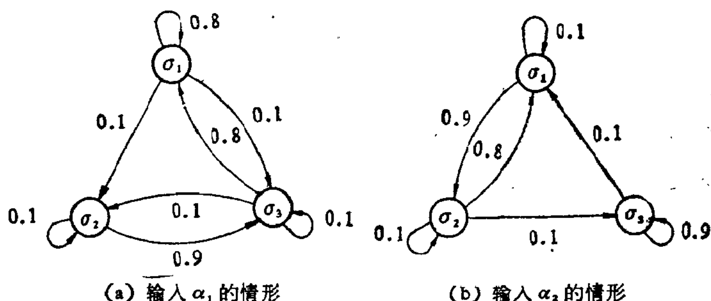
$$E[\mu_G{}^{N-i+1}(x_{N-i+1}) = \sum_{x_{N-i+1}} \mu_G{}^{N-i+1}(x_{N-i+1}) p(x_{N-i+1}/x_{N-i}, u_{N-i}) \tag{34}$$

而且，$\mu_G{}^{N-i}(x_{N-i})$ 是 $t = N - i$ 时的模糊目标 G^{N-i} 的隶属函数，是由 $t = N - i + 1$ 时的模糊目标导出来的. 因此，使用式(33)，(34)可得问题(即，使达到模糊目标 G^N 的概率为最大)的解.

表 4 状态转移表

(a) 输入 $u_t = \alpha_1$ 的情形			
x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.8	0.1	0.1
σ_2	0	0.1	0.9
σ_3	0.8	0.1	0.1

(b) 输入 $u_t = \alpha_2$ 的情形			
x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.1	0.9	0
σ_2	0.8	0.1	0.1
σ_3	0.1	0	0.9



(a) 输入 α_1 的情形　　(b) 输入 α_2 的情形

图 9　状态转移图

现在，我们举如下简单的例子

例 2 给出概率系统如下．状态集合 $X=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，输入集合 $U=\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$N=2$，状态转移概率 $p(x_{t+1}/x_t, u_t)$ 如表 4 给出．把表 4 用图表示就是图 9．又，设 $N=2$ 时的模糊目标 G^2 为

$$\mu_{G^2}(\sigma_1)=0.3,\ \mu_{G^2}(\sigma_2)=1,\ \mu_{G^2}(\sigma_3)=0.8 \quad (图\ 10)$$

$t=0, 1$ 的模糊约束 C_0, C_1 为

$$\mu_0(\alpha_1)=0.7, \qquad \mu_0(\alpha_2)=1$$

$$\mu_1(\alpha_1)=1, \qquad \mu_1(\alpha_2)=0.6 \qquad (图\ 11)$$

由于模糊目标 G^2，模糊约束 μ_1 已知，所以在式 (33)，(34) 中使 $N=2$（根据假设），$i=1$，可以求得模糊目标 G^1．而式 (33)，(34) 变成了下式．

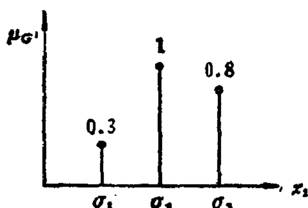


图 10　在 $t=2$ 时的模糊目标 G^2

$$\mu_{G^1}(x_1)=\max_{u_1}[\mu_1(u_1)\wedge E[\mu_{G^2}(x_2)]] \tag{35}$$

其中，

$$E[\mu_{G^2}(x_2)]=\sum_{x_2}\mu_{G^2}(x_2)p(x_2/x_1, u_1) \tag{36}$$

$x_1, x_2\in\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，$u_1\in\{\alpha_1, \alpha_2\}$．如由式 (36) 所知，$E[\mu_{G^2}\times(x_2)]$ 以时刻 $t=1$ 时的状态 x_1，输入 u_1 为条件，所以，$E[\mu_{G^2}\times(x_2)]$ 作为 x_1, u_1 的函数，由表 5 给出．

比如，$x_1=\sigma_1$，$u_1=\alpha_1$ 时，式 (36) 成为

$$E[\mu_{G^2}(x_2)]=\sum_{x_2}\mu_{G^2}(x_2)p(x_2/\sigma_1, \alpha_1)$$

$$=\mu_{G^2}(\sigma_1)p(\sigma_1/\sigma_1, \alpha_1)+\mu_{G^2}(\sigma_2)p(\sigma_2/\sigma_1, \alpha_1)$$

$$+\mu_{G^2}(\sigma_3)p(\sigma_3/\sigma_1, \alpha_1)$$

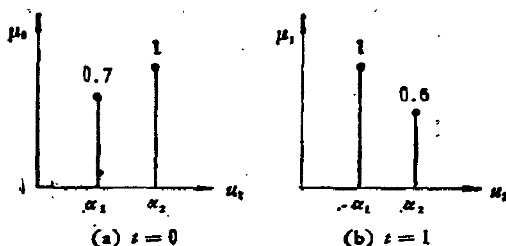


图 11　$t=0, 1$ 时的模糊约束 C_0, C_1

表 5　G^1 的条件期望值 $E[\mu_{G^2}(x_2)]$

u_1 \ x_1	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	0.42	0.82	0.42
α_2	0.93	0.42	0.75

将各值代入，则得

$$E[\mu_{G^2}(x_2)] = 0.3 \times 0.8 + 1 \times 0.1 + 0.8 \times 0.1 = 0.42$$

同样，若 $x_1 = \sigma_1$, $u_1 = \alpha_2$，则得

$$E[\mu_{G^2}(x_2)] = \sum_{x_2} \mu_{G^2}(x_2) p(x_2/\sigma_1, \alpha_2) = 0.3 \times 0.1 + 1 \times 0.9 + 0.8 \times 0 = 0.93$$

以下若按同样方法求，即得前面的表 5. 利用这个表和式(35)，则可求得 $t=1$ 时的模糊目标 G^1 如下.

$$\mu_{G^1}(\sigma_1) = 0.6,\ \mu_{G^1}(\sigma_2) = 0.82,\ \mu_{G^1}(\sigma_3) = 0.6 \quad (37-a)$$

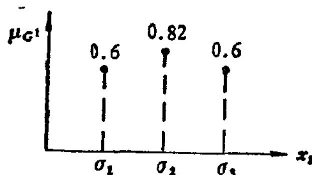
(图 12)，相应的最大判决为

$$\pi_1(\sigma_1) = \alpha_2,\ \pi_1(\sigma_2) = \alpha_1,\ \pi_1(\sigma_3) = \alpha_2 \quad (37-b)$$

比如，

$$\mu_{G^1}(\sigma_1)=[\mu_1(\alpha_1)\wedge E[\mu_{G^2}(x_2)]]\vee[\mu_1(\alpha_2)\wedge E[\mu_{G^2}(x_2)]]$$
$$=[1\wedge 0.42]\vee[0.6\wedge 0.93]$$
$$=0.42\vee 0.6=0.6$$
$$\vdots$$
$$\alpha_2$$

其中，右边第一项的 $E[\mu_{G^2}(x_2)]$ 与 σ_1，α_1 有关，第二项的 $E[\mu_{G^2}(x_2)]$ 与 σ_1，α_2 有关,对应表 5 的第一列。



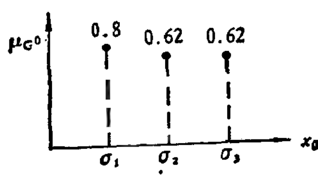


图 12 在 $t=1$ 时的模糊目标G^1　　图 13 在 $t=0$ 时的模糊目标 G^0

其次,用现在所求的模糊目标 G^1 及图 11 的模糊约束 μ_0，在式 (34) 中令 $i=2$,即

$$E[\mu_{G^1}(x_1)]=\sum_{x_1}\mu_{G^1}(x_1)p(x_1/x_0,u_0) \tag{38}$$

可求得已知 x_0，u_0 时的 $E[\mu_{G^1}(x_1)]$。比如，$x_0=\sigma_1$，$u_0=\alpha_1$ 时,式 (38) 成为

$$\begin{aligned}&E[\mu_{G^1}(x_1)]\\&=\mu_{G^1}(\sigma_1)p(\sigma_1/\sigma_1,\alpha_1)+\mu_{G^1}(\sigma_2)p(\sigma_2/\sigma_1,\alpha_1)\\&\quad+\mu_{G^1}(\sigma_3)p(\sigma_3/\sigma_1,\alpha_1)\\&=0.6\times 0.8+0.82\times 0.1+0.6\times 0.1\\&\doteq 0.62\end{aligned}$$

以下按同样方法求,则得表 6。再用这个表和下面的式子

$$\mu_{G^0}(x_0)=\max_{u_0}[\mu_0(u_0)\wedge E[\mu_{G^1}(x_1)]]$$

表 6　G^1 的条件期望值 $E[\mu_{G^1}(x_1)]$

u_0 \ x_0	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	0.62	0.62	0.62
α_2	0.8	0.62	0.6

比如,则得 $\mu_{G^0}(\sigma_1)$ 为

$$\mu_{G^0}(\sigma_1) = [0.7 \wedge 0.62] \vee [1 \wedge 0.8]$$
$$= 0.62 \vee 0.8 = 0.8$$
$$\vdots$$
$$\alpha_2$$

最大判决为 $\pi_0(\sigma_1) = \alpha_2$。以下按同样方法进行，则得 $t=0$ 时的模糊目标 G^0 为

$$\mu_{G^0}(\sigma_1) = 0.8,\ \mu_{G^0}(\sigma_2) = 0.62,\ \mu_{G^0}(\sigma_3) = 0.62 \quad (39\text{-}a)$$

对应的最大判决为(图 13)

$$\pi_0(\sigma_1) = \alpha_1,\ \pi_0(\sigma_2) = \alpha_1 \text{ 或 } \alpha_2,\ \pi_0(\sigma_3) = \alpha_1 \quad (39\text{-}b)$$

因此，模糊目标 G^0 的值，表示概率系统分别从 σ_1，σ_2，σ_3 开始时,达到模糊目标 G^2 的概率。这时，输入是用最大判决函数 π_0，π_1 来选择的。

上面就终止时刻N是预先确定时的确定性系统及概率系统进行了叙述，下面，我们就终止时刻事先不确定时的确定性系统的行为进行讲述。

现在，把确定性系统 A 表示为

$$A = (X, U, f, T) \quad (40)$$

其中,$X = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_l, \sigma_{l+1}, \cdots, \sigma_n\}$ 是状态集合，$U = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 是输入集合,$T = \{\sigma_{l+1}, \cdots, \sigma_n\}$ 是X 的子集，称为**终止集合**．这时，T 中的状态称为**吸收状态**。f 是状态转移函数。

$$f: X \times U \to X \quad (41)$$

即，设系统 A 是用状态方程

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{42}$$

表示其特征的. 其中，$x_t \in X$，$u_t \in U$ 分别表示时刻 t 的状态和输入. 而且，设 σ_i 在吸收状态时，对于所有的输入 $\alpha_j \in U$，$f(\sigma_i, \alpha_j) = \sigma_i$ 成立.

因此，系统 A 的终止时刻用状态转移后最初进入终止集合时的时刻来表示. 还有，设模糊目标 G 如刚开始那样，不是作为 X 上的，而是作为 T 中的模糊集来表示的. 而且，对于输入的模糊约束，在时间上独立，且依赖于状态. 即，A 的状态为 x_t 时，输入 u_t 的模糊约束用 U 中的模糊集 $C(x_t)$ 表示，是用条件隶属函数 $\mu_C(u_t/x_t)$ 表示其特征的.

设 x_0 为 T' 中的初始状态. 这里，T' 是 T 的补集，$T' = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_l\} = X - T$. 则对于初始状态 x_0 有如下的模糊判决 $D(x_0)$ 与之对应.

$$D(x_0) = C(x_0) \cap C(x_1) \cap \cdots \cap C(x_{N-1}) \cap G \tag{43}$$

其中，状态 $x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N$ 可根据状态转移函数. 即根据

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, u_0) \\ x_2 &= f(x_1, u_1) = f(f(x_0, u_0), u_1) \\ x_3 &= f(x_2, u_2) \\ &= f(f(f(x_0, u_0), u_1) u_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{44}$$

由初始状态 x_0 和输入 $u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}$ 决定. 根据式(43)，作为一般的情况，对于 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 可导出

$$D(x_t) = C(x_t) \cap C(x_{t+1}) \cap \cdots \cap C(x_{t+N-1}) \cap G \tag{45}$$

同样，还可导出下式.

$$D(x_{t+1}) = D(x_{t+1}) \cap \cdots \cap C(x_{t+N-1}) \cap G \tag{46}$$

因此，式(45)可改写为

$$D(x_t) = C(x_t) \cap D(x_{t+1})$$

$$= C(x_t) \cap D(f(x_t, u_t)) \tag{47}$$

当 $t = 0$ 时,若用隶属函数表示上式,则有

$$\mu_D(u_0, \cdots, u_{N-1}/x_0)$$
$$= \mu_C(u_0/x_0) \wedge \mu_D(u_1, \cdots, u_{N-1}/f(x_0, u_0)) \tag{48}$$

这里,终止时刻 N, 根据状态方程(式(42))及终止条件 $x_N \in T$, $x_t \notin T(t < N)$, 表示为 $x_0, u_0, u_1, u_2, \cdots$ 的函数. 而给予系统 A 的输入 $u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$ 是用策略函数 π,即

$$\pi: T' \to U \tag{49}$$

决定的. 这个函数决定,当 A 的状态为 $x_t \in T'$ 时,应当给予 A 输入 u_t. 即

$$u_t = \pi(x_t), \ t = 0, 1, \cdots, N-1, \ x_t \in T' \tag{50}$$

因为,输入 $u_0, \cdots, u_{N-1}$ 是根据式(50)及式(42)的状态方程,由初始状态 x_0 和策略函数 π 决定的,所以,模糊判决 $D(x_0)$ 的隶属函数 $\mu_D(u_0, \cdots, u_{N-1}/x_0)$ 可改写为 $\mu_D(x_0/\pi)$. 同样,$\mu_C(u_0/x_0)$ 可改写为 $\mu_C(\pi(x_0)/x_0)$, $\mu_D(u_1, \cdots, u_{N-1}/f(x_0, u_0))$ 可改写为 $\mu_D(f(x_0, \pi(x_0))/\pi)$. 因此,式(48)成为

$$\mu_D(x_0/\pi) = \mu_C(\pi(x_0)/x_0) \wedge \mu_D(f(x_0, \pi(x_0))/\pi) \tag{51}$$

可是,对于 $T' = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_l\}$ 中的各个状态都可求式(51),所以可得 l 个方程. 即,

$$\begin{array}{c} \mu_D(\sigma_1/\pi) = \mu_C(\pi(\sigma_1)/\sigma_1) \wedge \mu_D(f(\sigma_1, \pi(\sigma_1))/\pi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_D(\sigma_l/\pi) = \mu_C(\pi(\sigma_l)/\sigma_l) \wedge \mu_D(f(\sigma_l, \pi(\sigma_l))/\pi) \end{array} \tag{52}$$

由这 l 个方程,可以在给出 π 时求 $\mu_D(\sigma_i)$. 其中,假定在 π 下系统不终止,即,当不存在使 $x_N \in T$ 的 N 时, $\mu_D = 0$,而对于 T 中的状态,$\mu_D = \mu_G$.

我们把策略 π 表示为如下的策略向量.

$$\pi = (\pi(\sigma_1), \cdots, \pi(\sigma_l)) \tag{53}$$

其中,第 i 个元素表示系统在状态 σ_i 时应当给予的输入. 由

于$\pi(\sigma_i)$是$U=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$的元素，所以，存在$m^l$个策略向量。

对于式(52)的方程组，定义列向量

$$\mu_D(\pi)=(\mu_D(\sigma_1/\pi),\cdots,\mu_D(\sigma_n/\pi))' \tag{54}$$

称其为**目标到达向量**. 向量的元素是对应于π的，它表示D在各状态$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的隶属函数值.

关于两个策略π',π''，导入如下的顺序.

$$\pi'\geqslant\pi''\Longleftrightarrow\mu_D(\pi')\geqslant\mu_D(\pi'') \tag{55}$$

它表示所谓策略π'比策略π''好或两者相同，就是对各$i=1,\cdots,n$有$\mu_D(\sigma_i/\pi')\geqslant\mu_D(\sigma_i/\pi'')$. 若$\pi$对所有的策略或者好或者相同，则称$\pi$为**最优策略**.

现在，如果给了两个向量π',π''，则用下式能够得到满足$\pi\geqslant\pi',\pi\geqslant\pi''$的$\pi$. 对于向量$\pi$的各元素$\pi_i(i=1,\cdots,l)$如下定义

$$\pi_i=\begin{cases}\pi_i'\cdots\mu_D(\sigma_i/\pi')\geqslant\mu_D(\sigma_i/\pi'')\\ \pi_i''\cdots\mu_D(\sigma_i/\pi')<\mu_D(\sigma_i/\pi'')\end{cases} \tag{56}$$

由此，再加上由于策略是有限个，则最优策略存在是显然的.

下面，我们由式(51)导出，求与最优策略对应的目标达到向量所用的方程. 首先，令

$$\mu_D^M=\max_{\pi}\mu_D(\pi) \tag{57}$$

设$P(\pi)$为如下的$n\times n$矩阵. 其中，n表示系统的状态数.

$$P(\pi)=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\cdots p_{1n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ p_{n1} & p_{n2}\cdots p_{nn}\end{bmatrix} \tag{58}$$

这里，第ij元素由

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \sigma_j=f(\sigma_i,\pi(\sigma_i))\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases} \tag{59}$$

给出. 意即，在状态σ_i时输入了$\pi(\sigma_i)$，这时若下一个状态为

σ_j，则 $p_{ij}=1$. 再设 $\mu_C(\pi)$ 为如下的 n 维向量.

$$\mu_C(\pi)=(\mu_C(\pi(\sigma_1)/\sigma_1),\cdots,\mu_C(\pi(\sigma_n)/\sigma_n))' \tag{60}$$

于是，如果在式(51)两边取 max，即取 $\vee$，则

$$\mu_D^M=\bigvee_{\pi}[\mu_C(\pi)\wedge P(\pi)\mu_D^M] \tag{61}$$

这就是用来求 μ_D^M 的方程，因为 $\vee$，和 $\wedge$ 是可分配的，所以上式还可表达得更简单些. 如果用 μ_D^M 的元素表示，则对于 $i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$ 为

$$\mu_C^M(\sigma_i)=\bigvee_{j}[\mu_D(\alpha_j/\sigma_i)\wedge\mu_D^M(f(\sigma_i,\alpha_j))] \tag{62}$$

(1)

$$f(\sigma_i,\alpha_j)=\begin{cases}\text{依赖于输入 }\alpha_j\text{ 的 }\sigma_i\text{ 的下一个状态}, i=1,\cdots,l\\ \sigma_i, i=l+1,\cdots,n(\text{即 }\sigma_i\in T)\end{cases}$$

(2)

$$\mu_C(\alpha_j/\sigma_i)=\begin{cases}\text{对于 }\sigma_i\text{ 的输入 }\alpha_j\text{ 的约束值}, i=1,\cdots,l\\ 1, i=l+1,\cdots,n\ (\text{即 }\sigma_i\in T)\end{cases}$$

(3)

$$\mu_D^M(\sigma_i)=\begin{cases}\text{最优到达向量的第 }i\text{ 个元素}, i=1,\cdots,l\\ \mu_G(\sigma_i),\sigma_i\in T(i=l+1,\cdots,n)\end{cases}$$

因此，对于 $i=l+1,\cdots,n$，$\mu_D^M(\sigma_i)$ 的值是已知的，$\mu_C(\alpha_j/\sigma_i)$ 的值也是已知的，但是，对于 $i=1,\cdots,l$，$\mu_D^M(\sigma_i)$ 是未知的.

为了求未知的 $\mu_D^M(\sigma_i)$，我们把式(62)改成如下的矩阵表示[1].

1) 一般地，若设 $A=\{a_{ij}\}$ 为 $m\times n$ 模糊矩阵，$B=\{b_{ij}\}$ 为 $n\times r$ 模糊矩阵，则 A 和 B 的矩阵积 $C=\{c_{ij}\}$ 为 $m\times r$ 模糊矩阵，定义如下. 其中，$0\leqslant a_{ij}, b_{ij}\leqslant 1$.

$$C=AoB\Longleftrightarrow c_{ij}=\bigvee_{k}[a_{ik}\wedge b_{kj}]$$

又，若设 A，B 为 $m\times n$ 模糊矩阵，则矩阵和 C 为 $m\times n$ 模糊矩阵，如下定义

$$C=A+B\Longleftrightarrow c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$$

$$\omega = B\omega + \gamma \tag{63}$$

这里，

(a) $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l)'$，其中，$\omega_i = \mu_D^M(\sigma_i)$

(b) $B = [b_{ij}]$ 是 $l \times l$ 矩阵，对于各 i, j，

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \sigma_j \text{ 不是 } \sigma_i \text{ 的下一个状态} \\ \bigvee_{\alpha k} \mu_C(\alpha_k/\sigma_i), \alpha_k \text{ 是满足 } f(\sigma_i, \alpha_k) \text{ 的输入} \end{cases}$$

(c) $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l)'$

$$\gamma_i = \bigvee_j [\mu_C(\alpha_j/\sigma_i) \wedge \mu_G(f(\sigma_i, \alpha_j))]$$

其中，$\mu_G(\sigma_i) = 0, \sigma_i \in T'$。

可是，因为式 (63) 取线性方程的形式，所以，反复应用可求出 ω。特别是，若假定 $\omega^0 = (0, \cdots, 0)'$，

$$\omega^{k+1} = B\omega^k + \gamma \tag{64}$$

则有

$$\begin{aligned} \omega^1 &= B\omega^0 + \gamma = \gamma \\ \omega^2 &= B\omega^1 + \gamma = B\gamma + \gamma = (B + I)\gamma \\ \omega^3 &= B\omega^2 + \gamma = B(B + I)\gamma + \gamma \\ &= (B^2 + B + I)\gamma \\ &\vdots \\ \omega^k &= (B^{k-1} + B^{k-2} + B + I)\gamma \\ &\vdots \end{aligned}$$

其中，I 是单位矩阵. 由此可知，$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \cdots$ 是单调不减的. 而且由于对任意的 k 有 $\omega^k \leqslant (1, \cdots, 1)$，可知收敛于式(63)的解. 但是，根据模糊矩阵的性质，一般地，若设 B 为 l 次的模糊矩阵，则对 $k \geqslant l$ 的 k，下式成立.

$$\begin{aligned} &I + B + B^2 + \cdots + B^{k-1} \\ &= I + B + B^2 + \cdots + B^{l-1} \end{aligned} \tag{65}$$

由此可知，对于 $k \geqslant l$ 的 k

$$\omega^k = \omega^l \tag{66}$$

成立．于是可知，式 (63) 的解为 $\omega = \omega^l$．

表 7　状态转移表

状态＼输入	α_1	α_2
σ_1	σ_4	σ_2
σ_2	σ_3	σ_2
σ_3	σ_5	σ_1
σ_4	σ_4	σ_4
σ_5	σ_5	σ_5

举一个简单的例子．

例 3　现在，给出如下的确定性系统 $A = (X, U, f, T)$．设 $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$，$U = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，$T = \{\sigma_4, \sigma_5\}$，状态转移函数 f 由表 7 给出．另外，设模糊目标 $\mu_G(\sigma_i)$，$i = 4, 5$，由

$$\mu_G(\sigma_4) = 1, \ \mu_G(\sigma_5) = 0.8$$

给出，而模糊约束 $\mu_C(\alpha_j/\sigma_i)$ 如下给出．

$$C(\sigma_1) = \{(\alpha_1, 0.6), (\alpha_2, 1)\}$$
$$C(\sigma_2) = \{(\alpha_1, 0.8), (\alpha_2, 1)\}$$
$$C(\sigma_3) = \{(\alpha_1, 1), (\alpha_2, 0.7)\}$$

假定，关于模糊目标 G，对于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \notin T$，有 $\mu_G(\sigma_1) = \mu_G(\sigma_2) = \mu_G(\sigma_3) = 0$，关于模糊约束 C，对于 $\sigma_4, \sigma_5 \in T$，有 $\mu_C(\alpha_j/\sigma_4) = \mu_C(\alpha_j/\sigma_5) = 1$．

根据上述，把状态转移，模糊目标，模糊约束总起来画成图，就如图 14 所示．其中，模糊目标表示在状态 σ_4，σ_5 右边．模糊约束表示在各枝的输入的右边．

将这些值代入式(62)，即，

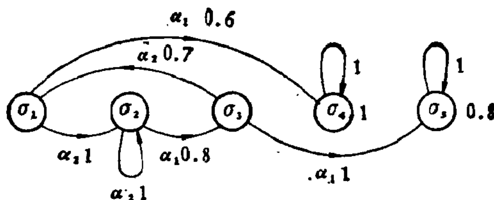


图 14 状态转移，模糊目标，模糊约束

$$\mu_D^M(\sigma_i)=\bigvee_j[\mu_C(\alpha_j/\sigma_i)\wedge\mu_D^M(f(\sigma_i,\alpha_j))] \qquad (67)$$

其中，$i=1,2,\cdots,5$，$j=1,2$，则得

$$\begin{aligned}
\mu_D^M(\sigma_1)&=[0.6\wedge\mu_D^M(\sigma_4)]\vee[1\wedge\mu_D^M(\sigma_2)] \qquad (68)\\
\mu_D^M(\sigma_2)&=[0.8\wedge\mu_D^M(\sigma_3)]\vee[1\wedge\mu_D^M(\sigma_2)]\\
\mu_D^M(\sigma_3)&=[1\wedge\mu_D^M(\sigma_5)]\vee[0.7\wedge\mu_D^M(\sigma_1)]\\
\mu_D^M(\sigma_4)&=\mu_G(\sigma_4)=1\\
\mu_D^M(\sigma_5)&=\mu_G(\sigma_5)=0.8
\end{aligned}$$

将这些式子进一步简化，则得

$$\begin{aligned}
\mu_D^M(\sigma_1)&=0.6\vee\mu_D^M(\sigma_2)\\
\mu_D^M(\sigma_2)&=[0.8\wedge\mu_D^M(\sigma_3)]\vee\mu_D^M(\sigma_2) \qquad (69)\\
\mu_D^M(\sigma_3)&=0.8\vee[0.7\wedge\mu_D^M(\sigma_1)]
\end{aligned}$$

因此，如果令 $\omega_i=\mu_D^M(\sigma_i)$，$i=1,2,3$，则能用如下的矩阵表示

$$\omega=B\omega+\gamma \qquad (70)$$

其中，

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0.8\\ 0.7 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \gamma=\begin{bmatrix}0.6\\ 0\\ 0.8\end{bmatrix}$$

如果令 $\omega^0=(0,0,0)'$，则 $\omega^1=(0.6,0,0.8)'$，同样，有

$$\omega^2=(0.6,0.8,0.8)',\ \omega^3=(0.8,0.8,0.8)'$$

$$\omega^4=\omega^5=\cdots(0.8,0.8,0.8)'$$

于是，得式（70）的解为

$$\omega^3=(0.8,0.8,0.8)'$$

回过头来我们再看式（51），（52）．比如，若设策略向量为 $\pi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则式（52）成为

$$\mu_D(\sigma_1/\pi)=0.6\wedge\mu_D(\sigma_4/\pi)$$

$$\mu_D(\sigma_2/\pi)=0.8\wedge\mu_D(\sigma_3/\pi)$$

$$\mu_D(\sigma_3/\pi)=1\wedge\mu_D(\sigma_5/\pi)$$

根据假定，$\mu_D(\sigma_4/\pi)=\mu_G(\sigma_4)=1$，$\mu_D(\sigma_5/\pi)=\mu_G(\sigma_5)=0.8$，立即可得，

$$\mu_D(\sigma_1/\pi)=0.6,\ \mu_D(\sigma_2/\pi)=0.8,\ \mu_D(\sigma_3/\pi)=0.8$$

这就是 $\pi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 时的解．对 8 种策略向量 $\pi_1,\cdots,\pi_8$ 用同样的作法，便得表 8．试一下式（55），并利用式（55），可由 $\pi_2(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2)$，$\pi_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1)$ 求 $\pi_1=(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1)$，$\pi_1\geqslant\pi_2$，$\pi_1\geqslant\pi_3$．另外，由表 8，可知最大策略为 $\pi_5=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1)$，这里的 μ_D 值与先前所求的值一致．

表 8　对于策略 π 的模糊判决 μ_D 的值

π	$\mu_D(\sigma_i/\pi)$		
	σ_1	σ_2	σ_3
$(\alpha_1\ \alpha_1\ \alpha_1)$	0.6	0.8	0.8
$(\alpha_1\ \alpha_1\ \alpha_2)$	0.6	0.6	0.6
$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_1)$	0.6	0	0.8
$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_2)$	0.6	0	0.6
$(\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_1)$	0.8	0.8	0.8
$(\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_2)$	0	0	0
$(\alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_1)$	0	0	0.8
$(\alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_2)$	0	0	0

这里只说明了确定性系统的情况，如果把式(58)换成概率转移矩阵、模糊转移矩阵，则可与确定性系统的情况大致相同地处理概率系统、模糊系统。

第十二章　L-模糊集

§1. 引　言

作为本书的总结，我们来讨论模糊集的扩张，即 L-模糊集。

前面，在所叙述的模糊集的定义中，只限于模糊集是具有值域为 $[0,1]$ 的特殊隶属函数的集合，亦即若空间 X 中的模糊集是 A，则以隶属函数

$$\mu_A:\ X \to [0,\ 1] \tag{1}$$

表示其特征．对于这样定义的模糊集，能够导出下面关于模糊集的运算．

设 A、B 为 X 中的模糊集，μ_A，μ_B 分别表示为 A，B 的特征隶属函数，对于任意的 $x \in X$，可如下定义：

包含　$A \subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$　(2)

相等　$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$　(3)

补集　$\bar{A} \Longleftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$　(4)

并集　$A \cup B \Longleftrightarrow \mu_{A\cup B}(x)$

$$= \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{5}$$

交集　$A \cap B \Longleftrightarrow \mu_{A\cap B}(x)$

$$= \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{6}$$

代数积　$AB \Longleftrightarrow \mu_{AB}(x)$

$$= \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{7}$$

代数和　$A \oplus B \Longleftrightarrow \mu_{A\oplus B}(x)$

$$= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{8}$$

并且，若 A，B，Λ 是模糊集，则 A，B，Λ 的凸组合$(A, B; \Lambda)$ 可定义为

$$\text{凸组合}(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \bar{\Lambda} B \tag{9}$$

其中，$\bar{\Lambda}$是 Λ 的补集，$+$是通常的加法。

根据这样定义的模糊集运算，其基本性质可列举如下：

(a) $A \subseteq A$ (自反律) (10)

(b) $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (非对称律) (11)

(c) $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (传递律) (12)

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ (13)

(e) $\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$(幂等律) (14)

(f) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$(交换律) (15)

(g) $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\}$(结合律) (16)

(h) $\left.\begin{array}{l} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\}$(吸收律) (17)

(i) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$(分配律) (18)

(j) $\bar{\bar{A}} = A$ (双重否定律) (19)

(k) $\left.\begin{array}{l} (\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B} \\ (\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}\right\}$(德·莫尔甘法则) (20)

(l) $\left.\begin{array}{l} A \cup \Omega^{1)} = \Omega,\ A \cap \Omega = A \\ A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{array}\right\}$(定常律) (21)

(m) 一般地

---

1) Ω 是对 X 说的，对一切 $x \in X$ 有 $\mu_\Omega(x) = 1$，此外，$\emptyset$ 是空集，定义为 $\mu_\emptyset(x) = 0$。

$$\left.\begin{array}{l} A \cup \overline{A} \neq \Omega \\ A \cap \overline{A} \neq \varnothing \end{array}\right\}（互补律不成立） \tag{22}$$

由此可知，由于一般对模糊集(22)式的互补律不成立，所以得知模糊集在包含关于⊆，即在∪，∩下不是布尔格而构成分配格。

模糊关系可简单地表示如下。

所谓直积空间 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ 中的模糊关系 R，是指 $X \times Y$ 的模糊集，它是以隶属函数

$$\mu_R: X \times Y \to [0, 1] \tag{23}$$

表示其特征的。

更一般地，所谓直积空间

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

的 n 项模糊关系 R，就是由隶属函数

$$\mu_R: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to [0, 1]$$

即 $\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0, 1]$ 表示其特征的模糊集。

模糊关系的运算，可给定如下：

设 R_1, R_2, R_3 是 $X \times X$ 中的模糊关系，对任意的 $x, y \in X$，有

包含 $\quad R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow \mu_{R_1}(x, y) \leqslant \mu_{R_2}(x, y) \quad (24)$

并 $\quad R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow \mu_{R_1 \cup R_2}(x, y)$

$$= \max[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)] \tag{25}$$

交 $\quad R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow \mu_{R_1 \cap R_2}(x, y)$

$$= \min[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)] \tag{26}$$

补模糊关系 $\quad \overline{R} \Leftrightarrow \mu_{\overline{R}}(x, y)$

$$= 1 - \mu_R(x, y) \tag{27}$$

模糊关系的合成 $\quad R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \mu_{R_1 \circ R_2}(x, y)$

$$= \sup_{z \in X} \min[\mu_{R_1}(x, z), \mu_{R_2}(z, y)] \tag{28}$$

逆模糊关系 $\quad R^c \Leftrightarrow \mu_{R^c}(x, y) = \mu_R(y, x) \quad (29)$

恒等模糊关系 $I \Longleftrightarrow \mu_I(x, y) = \begin{cases} 1 \cdots x = y \\ 0 \cdots x \neq y \end{cases}$ (30)

零模糊关系 $O \Longleftrightarrow \mu_O(x, y) = 0$ (31)

全称模糊关系 $E = \mu_E(x, y) = 1$ (32)

由这些模糊关系的运算可以得出的基本性质，若列举出来则有下列诸式:

1° 对所有的模糊关系，有

$$O \subseteq R \subseteq E \tag{33}$$

2° $R \subseteq R$

3° $R_1 \subseteq R_2,\ R_2 \subseteq R_1 \Rightarrow R_1 = R_2$ (34)

4° $R_1 \subseteq R_2,\ R_2 \subseteq R_3 \Rightarrow R_1 \subseteq R_3$ (35)

5° $R_1 \subseteq R_2 \Longleftrightarrow R_1 \cup R_2 = R_2 \Longleftrightarrow R_1 \cap R_2 = R_1$ (36)

6° $R_1 \subseteq R_2,\ R_3 \subseteq R_4 \Rightarrow R_1 \cup R_3 \subseteq R_2 \cup R_4$

$R_1 \cap R_3 \subseteq R_2 \cap R_4$ (37)

7° $R \cup R = R,\ R \cap R = R$ (38)

8° $R_1 \cup R_2 = R_2 \cup R_1,\ R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_1$ (39)

9° $\left.\begin{array}{l}(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3) \\ (R_1 \cap R_2) \cap R_3 = R_1 \cap (R_2 \cap R_3)\end{array}\right\}$ (40)

10° $\left.\begin{array}{l}R_1 \cup (R_1 \cap R_2) = R_1 \\ R_1 \cap (R_1 \cup R_2) = R_1\end{array}\right\}$ (41)

11° $\left.\begin{array}{l}R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3) \\ R_1 \cap (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3)\end{array}\right\}$ (42)

12° $\bar{\bar{R}} = R$ (43)

13° $\left.\begin{array}{l}(\overline{R_1 \cup R_2}) = \bar{R}_1 \cap R_2 \\ (\overline{R_1 \cap R_2}) = \bar{R}_1 \cup \bar{R}_2\end{array}\right\}$ (44)

14° $\left.\begin{array}{l}R \cup E = E,\ R \cap E = R \\ R \cup O = R,\ R \cap O = O\end{array}\right\}$ (45)

15° 一般地，

$$\left.\begin{array}{l} R\cup\bar{R}\neq E \\ R\cap\bar{R}\neq O \end{array}\right\} \tag{46}$$

另一方面，关于模糊关系的合成“○”，有：

16° $$\left.\begin{array}{l} I\circ R=R\circ I=R \\ O\circ R=R\circ O=O \end{array}\right\} \tag{47}$$

17° 一般地，$R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$ (48)

18° $(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$ (49)

19° $R^0=I,\ R^{m+1}=R^m\circ R$ (50)

20° $R^m\circ R^n=R^{m+n}$ (51)

21° $(R^m)^n=R^{mn}$ (52)

22° $$\left.\begin{array}{l} R_1\circ(R_2\cup R_3)=(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3) \\ (R_1\cup R_2)\circ R_3=(R_1\circ R_3)\cup(R_2\circ R_3) \end{array}\right\} \tag{53}$$

23° $$\left.\begin{array}{l} R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3) \\ (R_1\cap R_2)\circ R_3\subseteq(R_1\circ R_3)\cap(R_2\circ R_3) \end{array}\right\} \tag{54}$$

24° 若 $R_1\subseteq R_2$，$R_3\subseteq R_4$ 则

$$R_1\circ R_3\subseteq R_2\circ R_4 \tag{55}$$

关于逆模糊关系，有：

25° $$\left.\begin{array}{l} (R_1\cup R_2)^c=R_1^c\cup R_2^c \\ (R_1\cap R_2)^c=R_1^c\cap R_2^c \\ (R_1\circ R_2)^c=R_2^c\circ R_1^c \end{array}\right\} \tag{56}$$

26° $(R^c)^c=R$ (57)

27° $\overline{R^c}=\bar{R}^c$ (58)

28° 若 $R_1\subseteq R_2$，则

$$\left.\begin{array}{l} R_1^c\subseteq R_2^c \\ \bar{R}_1\supseteq\bar{R}_2 \end{array}\right\} \tag{59}$$

以上，就是关于模糊集以及模糊关系若干基本性质的总结。下面，我们来讨论 L-模糊集。

§2. L-模 糊 集

在前面叙述过的模糊集的定义中，因为隶属函数的值域是全有序结构$[0, 1]$，所以任意元素之间的顺序关系，通过隶属函数的值即隶属度，都是可以比较的。

然而，在现实世界中，不仅存在着可比较的东西，而且还存在着很多不能比较和难以比较的东西。例如，考虑引进计算机的情形，在价格、存储量、运算速度、静态容量等方面，哪个计算机最合适？难以作出明确判断的情形是经常有的。

对 L-模糊集来说，对象间的顺序关系，不单单是研究全序的关系，而且还研究半序的关系。

定义 1 所谓集合 $X=\{x\}$ 中的 L-模糊集 A，就是从集合X到半序集[1] L的映射，即

$$A: Y \to L \tag{60}$$

---

1) 在某集合L中，定义了顺序关系$\geqslant$，当对于x、y、$z \in L$，如果下面三条规则：

(i) 自反律：$x \geqslant x$;

(ii) 非对称律：若$x \geqslant y$, $y \geqslant x$，则$x = y$;

(iii) 传递律：若$x \geqslant y$, $y \geqslant z$，则$x \geqslant z$

成立时，则称L为半序集。例如图 1 就是这样的。L的所有元素间有顺序关系时，即当对于任意的$x, y \in L$，$x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 成立，则称L为全序集(图 2)。



图1　半序集



图2　全序集

在前面模糊集的定义中，是把用隶属函数表示其特征的事物称为模糊集。如果隶属函数确定了，那么模糊集也就清楚了。因为也可以反过来说，所以可以把隶属函数看作是模糊集。因此，在 L-模糊集的定义中，规定把映射本身就考虑为 L-模糊集。

这里，如果 L 是闭区间 $[0, 1]$，则 L-模糊集 A 就成为模糊集(即隶属函数)，且若 $L=\{0, 1\}$，则 A 就成为普通集合(即特征函数)。

若用 L^X 表示从 X 到 L 映射 (即 L-模糊集) 的全体，则 L^X 中的顺序关系可这样定义：令 A、B 是 L^X 中的元素，亦即 L-模糊集，对任意的 $x\in X$，有

包含 $A \leqslant B \Longleftrightarrow A(x) \leqslant B(x)$ (61)

相等 $A = B \Longleftrightarrow A(x) = B(x)$ (62)

若在 L 中定义了某种二元运算 $*$，则在 L^X 中⊛这样的二元运算可这样定义：对 L-模糊集 A、$B\in L^X$，有

$$(A \circledast B)(x) = A(x) * B(x) \tag{63}$$

例如，若在 L 中这个运算 $*$ 满足结合律、交换律、幂等律等[1]，则运算⊛在 L^X 中也分别满足结合律、交换律、幂等律等。例如，设运算 $*$ 是结合的，则

$$A(x) * B(x) * C(x) = (A(x) * B(x)) * C(x)$$

成立，由 (63) 则有

$$(A \circledast (B \circledast C))(x) = ((A \circledast B) \circledast C)(x)$$

因此，运算⊛是结合的，即

$$A \circledast (B \circledast C) = (A \circledast B) \circledast C$$

---

1) 对任意的 $x, y, z\in L$，有

(i) 结合律：$x*(y*z)=(x*y)*z$

(ii) 交换律：$x*y = y*x$

(iii) 幂等律：$x*x = x$

(iv) 消去律：$x*y = x*z \Rightarrow y = z$

成立.

但是,应当指出,对于消去律则没有这样的结论.

以后,L^X 中的运算⊛和 L 中的运算 $*$ 是混合使用的.

我们知道,在半序集 $L=(L, \leqslant)$ 中,当对任意的两个元素 x, y 的上、下限都存在时,L 就称为**格**. x, y 的上、下限分别用 $x\vee y$, $x\wedge y$ 表示.

1° 在格中,三个条件 $x\leqslant y$, $x\wedge y=x$, $x\vee y=y$ 是相互等价的.

2° 在任意格中,幂等律、交换律、结合律、吸收律均成立.

在格中,当满足下列模律时,称为**模格**.

模律: 若 $x\leqslant z$, 则 $(x\vee y)\wedge z=x\vee(y\wedge z)$. 另外,将满足分配律的格,称为**分配格**. 其分配律为

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

所谓布尔格就是包含对所有 x 满足 $O\leqslant x\leqslant I$ 的 O 和 I,以及存在使

$$x\vee\bar{x}=I,\quad x\wedge\bar{x}=0$$

成立的补元 $\bar{x}$ 的分配格.

这些格之间的相互关系为:

半序集⊇格⊇模格⊇分配格(包括全序集)⊇布尔格.(作为这些格的例子可见图1,图2,图3,图4.)

现在,我们令 L 为格,L^X 中的上限与下限的运算可定义如下:

A, B 是二个 L-模糊集,对任意的 $x\in X$, 可定义

并 $(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$ (64)

交 $(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$ (65)

其中,运算 $\vee$、$\wedge$ 依次是格 L 中的上限、下限运算.

因为前述的 L-模糊集运算 $A\cup B$、$A\cap B$，可改写为$A\vee B$，$A\wedge B$，并与模糊集的并、交相对应，因而可规定使用这样的表示法．事实上，设格 L 为 $[0, 1]$，$\vee=\max$，$\wedge=\min$，则(64)、(65) 式分别为

$$(A\cup B)(x)=\max[A(x), B(x)] \tag{66}$$

$$(A\cap B)(x)=\min[A(x), B(x)] \tag{67}$$

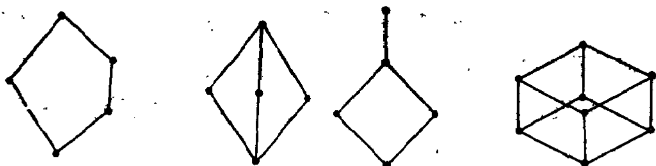


图1　格之例　图2　模格之例　图3　分配格之例　图4　布尔格之例

而且成为 (5)、(6) 式的模糊集的并、交的定义． 但是，在需要的场合下，也有将 $A\cup B$ 改换为 $A\vee B$，$A\cap B$ 改换为 $A\wedge B$ 来进行讨论的情形．

从这些 L-模糊集的运算 (61)，(62)，(64)，(65) 各式可知，L 的结构可推导到 L^X 中．例如，普通集合(换言之，即特征函数)由规定 $L=\{0, 1\}$ 得出，但这种情形 $\{0, 1\}$ 是布尔格，集合的全体就成为大家所熟知的那样的布尔格，亦即 $\{0, 1\}^X$ 是布尔格．另外，设 $L=[0, 1]$(分配格)，则它就成为模糊集，模糊集(即隶属函数)的全体 $[0, 1]^X$ 成为前面叙述过那样的分配格．更一般地，可叙述如下：

性质　如果 L 是模格、分配格、布劳威尔格[1]、布尔格，则

1) 在格 L 中，对给定的任意元素 $a, b\in L$，若满足 $a\wedge x\leqslant b$ 的所有 x 的集合，包含着叫做(a 关于 b 的)拟补元的最大元时，则称 L 为**布劳威尔格**(Brouwerian Lattice)．布劳威尔格是作为直觉主义逻辑的代数模型而知名的，以后还要涉及到它的一些内容．

L^X 也是那样.

但是，也有例外，比如设 L 为全序集，但 L^X 未必是全序集.

上面，对 X 仅仅考虑是集合的情形. 下面，我们来考察 X 是具有半序集、格等代数结构的情形.

设 L，X 为半序集，当映射 A：$X \to L$，对任意 $x, y \in X$，满足

$$x \leqslant y \Rightarrow A(x) \leqslant A(y) \tag{68}$$

时，则可称 A 为**单调的**. 若用 $\mathscr{L}(X)$ 表示从 X 到 L 的所有的单调函数集合，则单调函数 $A, B \in \mathscr{L}(X)$的顺序关系就可定义为

$$A \leqslant B \Longleftrightarrow A(x) \leqslant B(x), \ \forall_x \in X \tag{69}$$

于是，就象前面一样，$\mathscr{L}(X)$ 的结构可由 L 的结构推导出来.

性质 若设 L 为格，X 为半序集，则由于 $\mathscr{L}(X)$ 是从 L 导出的运算，即

$$(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x) \tag{70}$$

$$(A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x) \tag{71}$$

故 $\mathscr{L}(X)$ 构成格. 若 L 为模格、分配格，那么 $\mathscr{L}(X)$ 也是同样的.

当 L 为布尔格时，此性质不成立. 亦即设 L 为布尔格，A 的补集 $\overline{A}$ 定义为

$$\overline{A}(x) = \overline{A(x)} \quad x \in X \tag{72}$$

若 A 是单调的，则 $\overline{A}$ 为非单调的，即

$$x \leqslant y \Rightarrow \overline{A}(x) \geqslant \overline{A}(y) \tag{73}$$

其次，就是 X 作为格来给出，而在 L 的结构没有给出的情况下，试用下面的方法，把 X 的结构往 L（或 L 的部分集合）上诱导来看一看. 设对于从 X 到 L 的映射 W 定义为：

$$W(x) \vee W(y) = W(x \vee y) \tag{74}$$

$$W(x) \wedge W(y) = W(x \wedge y) \tag{75}$$

则由W是“到上的”映射，所以L构成格．详细地说，如果X是模格，分配格，布尔格，则L也是那样．

相反，当L是半序集时，可以把半序集纳入X。也就是说，设Ω是L^X的子集(从X到L的函数的集合)则对于任意的$A \in \Omega$，规定

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow A(x) \leqslant A(y) \tag{76}$$

由此，X便成为关于此顺序关系的半序集．若设$\Omega = L^X$，则各元素对其自身有$\leqslant$的关系，而不同的元素相互之间则成为不能进行比较的东西了．

假若L中存在最大元I，且对各$x \in X$都满足$A(x) = I$的$A \in \Omega$存在时，则用以下的方法，可以将顺序关系$\dot{\leqslant}$引入X．对任意的$A \in \Omega$，若规定

$$x \dot{\leqslant} y \Longleftrightarrow [A(x) = I] \Rightarrow [A(y) = I] \tag{77}$$

则

$$x \leqslant y \Rightarrow x \dot{\leqslant} y \tag{78}$$

成立．然而其逆却不成立．

前面研究了在L-模糊集的定义中的值域具有格结构的情形．就是说，在某集合X中，若设L-模糊集是A，则A是

$$A: X \to L \tag{79}$$

这样的映射，并且L是格．

特别地，L为布尔格B的情形，即A是下面映射的情形，便可导出下述饶有兴趣的性质．

$$A: X \to B \tag{80}$$

在这种情况下，L-模糊集名之为B-模糊集．

设A，C为在X上的B-模糊集，B-模糊集的运算定义如下：

对任意的 $x \in X$，规定

包含 $A \subseteq C \Leftrightarrow A(x) \leqslant C(x)$ (81)

相等 $A = C \Leftrightarrow A(x) = C(x)$ (82)

补集 $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}(x) = \overline{A(x)}$ (83)

并集 $A \cup C \Leftrightarrow (A \cup C)(x) = A(x) \vee C(x)$ (84)

交集 $A \cap C \Leftrightarrow (A \cap C)(x) = A(x) \wedge C(x)$ (85)

其中$\leqslant$，$-$，$\vee$，$\wedge$，分别表示在布尔格 B 上的顺序关系、补元、上限和下限.

B-模糊集的空集、全集可表示如下：

对任意的 $x \in X$，

空集 $\varnothing \Leftrightarrow \varnothing(x) = O$ (86)

全集 $U \Leftrightarrow U(x) = I$ (87)

这里，O，I 分别为布尔格 B 中的极小元，极大元.

由这些 B-模糊集的运算，很容易推得下面的性质.

性质 在 X 中，B-模糊集的全体 B^X，构成在运算 $\subseteq$，$\cup$，$\cap$，$-$之下的布尔格.

下面，对 B-模糊集的性质作几点说明. 首先，从 B-模糊集的凸结合开始.

设 A，C，Λ 为 B-模糊集，A，C，Λ 的**凸组合**[1)]表示为 $(A, C; \Lambda)$，则它可定义如下：

$$(A, C; \Lambda) = (\Lambda \cap A) \cup (\overline{\Lambda} \cap C) \tag{88}$$

性质 设 A，C 为 B-模糊集，对所有的 B-模糊集 Λ，则

$$A \cap C \subseteq (A, C; \Lambda) \subseteq A \cup C \tag{89}$$

成立.

证明 将 (88) 式的右边作如下的展开：

$(\Lambda \cap A) \cup (\overline{\Lambda} \cap C)$

---

1) 模糊集的情形，是下面形式[参见 (9) 式]：

$$(A, B, \Lambda) = \Lambda A + \overline{\Lambda} B$$

$$=((\Lambda\cap A)\cup\bar{\Lambda})\cap((\Lambda\cap A)\cup C)$$
$$=(\Lambda\cup\bar{\Lambda})\cap(A\cup\bar{\Lambda})\cap(\Lambda\cup C)\cap(A\cup C)$$

由于右边 $\subseteq(A\cup C)$，所以 $(A, C; \Lambda)\subseteq A\cup C$. 另一方面，

$$A\cap C\cap\Lambda\subseteq A\cap\Lambda\subseteq(A; C; \Lambda),$$
$$A\cap C\cap\bar{\Lambda}\subseteq C\cap\bar{\Lambda}\subseteq(A, C; \Lambda)$$

因而

$$A\cap C\subseteq(A, C; \Lambda)$$

其次，设 X 为 n 维欧几里得空间 E^n，以此为根据来叙述一下关于 B-模糊集的凸性.

一般地，在 E^n 中向量 x, y 的凸组合表示为

$$\lambda x+(1-\lambda)y,\ \lambda\in[0, 1]$$

由此，B-模糊集的凸性可定义如下.

所谓欧几里得空间 $X(=E^n)$ 中的 B-模糊集是凸的，就是指对任意的 $x_1, x_2\in X, \lambda\in[0, 1]$，则

$$A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2) \tag{90}$$

是成立的.

性质 如果 B-模糊集 A 是凸的，那么集合

$$\Gamma\alpha=\{x|A(x)\geqslant\alpha\} \tag{91}$$

对于任意的 $\alpha\in B(\alpha\neq O)$，也是凸的. 反过来亦成立.

证明(⇒) 若设 A 是凸的 B-模糊集，即设对任意的 x_1, $x_2\in X, \lambda\in[0, 1]$，有

$$A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2) \tag{92}$$

则当 $\Gamma\alpha=\{x|A(x)\geqslant\alpha\}, \alpha\in B(\alpha\neq 0)$ 是空的或只有唯一的元素构成的情形，$\Gamma\alpha$ 显然是凸的. 否则若设 $x_1, x_2\in\Gamma\alpha$，则 $A(x_1)\geqslant\alpha$, $A(x_2)\geqslant\alpha$，且 $A(x_1)\wedge A(x_2)\geqslant\alpha$. 因此，由式(92)得

$$A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\alpha$$

从而所有形如 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda\in[0, 1]$ 的点都属于 $\Gamma\alpha$，

可知 $\Gamma\alpha$ 是凸的。

(⇐) 设集合 $\Gamma\alpha$ 在 X 中是凸的. 这里，$\alpha \in B$，$\alpha \neq 0$，$x_1, x_2 \in X$，并令 $\alpha = A(x_1) \wedge A(x_2)$，则 $\alpha = O$ 的情形明显满足 (92)式. 设 $\alpha \neq O$，则由于 $A(x_1) \geqslant \alpha$，$A(x_2) \geqslant \alpha$，所以 $x_1, x_2 \in \Gamma\alpha$. 因为 $\Gamma\alpha$ 是凸的，所以对于所有的 $\lambda \in [0, 1]$，有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma\alpha$. 从而可知 $A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2)$，即式 (92) 成立，故 A 是凸的 B-模糊集.

凸 B-模糊集还具有下面的性质.

性质 设 A，C 是凸 B-模糊集，则它的交 (∩) 也是凸的.

在上面的讨论中，如果设 B-模糊集是凸的，则可知它的 $\Gamma\alpha$ (名曰 α-水平集合) 也是凸的，反之亦然. 据此，下面举几个由水平集合推导出来的、在 B-模糊集中成立的性质.

这里，仅就 X 作为欧几里得空间 E^n 来进行讨论.

所谓 B-模糊集是**弧连通的**，就是指对于在 X 中的任意元素 x_1，x_2，存在使

$$\pi(0) = x_1, \ \pi(1) = x_2$$

$$A(\pi(\lambda)) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2), \ \lambda \in [0, 1]$$

的约当弧 π: $[0, 1] \rightarrow X$.

性质 如果 B-模糊集 A 是弧连通的，则对于所有的 $\alpha \in B$，$\alpha \neq O$，其 α-水平集合 $\Gamma\alpha$，即

$$\Gamma\alpha = \{x \mid A(x) \geqslant \alpha\}$$

也是弧连通的. 反之亦然.

所谓 B-模糊集 A 关于点 $x_0 \in X$ 是**星形的**，指的是对于所有的 $x \in X$，$\lambda \in [0, 1]$，

$$A[\lambda x + (1-\lambda)x_0] \geqslant A(x) \wedge A(x_0) \qquad (93)$$

是成立的.

性质 如果 B-模糊集 A，对于点 $x_0 (\in X)$ 是星形的，则

对于所有使 $O \leqslant \alpha \leqslant A(x_0)$ 成立的 $\alpha \in B$，集合 $\Gamma\alpha = \{x | A(x) \geqslant \alpha\}$ 关于点 x_0 是星形的．反之亦然．

下面叙述 B-模糊集的有界性．

所谓 B-模糊集 A **严格有界**，就是指存在实数 γ，对于满足 $\|x\| \geqslant \gamma$ 的所有的 $x \in X$，都使 $A(x) = O$ 成立．其中，$\|x\|$ 表示欧几里得空间 X 中的模方．

作为这个定义的扩张，可以给出下面的定义：

所谓 B-模糊集 A 是以阶 α_0 **有界**，是指存在实数，使得对于满足 $\|x\| \geqslant \gamma$ 的所有的 $x \in X$，$A(x) < \alpha_0$ 成立．

性质　如果 B-模糊集 A 以阶 α_0 有界，则集合 $\Gamma\alpha_0 = \{x | A(x) \geqslant \alpha_0\}$ 是有界的．反之亦然．

所谓 B-模糊集 A **有洞**，是指集合

$$\Gamma = \{x | A(x) = O\} \tag{94}$$

是约当区域．

作为这个定义的扩张有下面的定义：

所谓 B-模糊集有阶 α_0 的洞，是指集合

$$\Gamma^1_{\alpha_0} = \{x | A(x) \leqslant \alpha_0\} \tag{95}$$

是约当区域．

性质　如果 B-模糊集 A 有阶 α_0 的洞，则 $\Gamma\alpha_0 = \{x | A(x) > \alpha_0\}$ 在 E^n 中有洞．

用同样的方法，可以定义 B-模糊集的连通性．亦即，如果 B-模糊集是连通的，那么它的 α 水平集合也是连通的．阶 α_0 的连通性，也可以由 α_0 水平集合导出．

上面关于模糊集的值域是布尔格的情形就先讲这些．下面说明关于值域是格半群的情形．值域是格半群的情形对叙述模糊关系是特别重要的．

在完备格[1]中，除上限($\vee$)，下限($\wedge$)的运算之外，还定义了$*$的二元运算。在这个完备格中：

① 在二元运算$*$的基础上，它是有单位元半群的；

② 当满足下式的分配律，即对于任意的$a, a_i, b, b_i \in L$，

$$
\begin{aligned}
a * \bigvee_i b_i &= \bigvee_i (a * b_i) \\
\left(\bigvee_i a_i\right) * b &= \bigvee_i (a_i * b)
\end{aligned} \tag{96}
$$

成立时，则称L为**完备格半群**. 在以后的讨论中，对任意的$a \in L$假定

$$
\begin{aligned}
O \wedge a = O, \quad O * a = a * O = O \\
I \wedge a = I, \quad I * a = a * I = a
\end{aligned} \tag{97}
$$

成立. 亦即L的极小元O是$*$运算下的零元，并且其极大元I是$*$运算下的单位元. 以后就把满足这样假定的L称为完备格半群或简称格半群. 例如，区间$[0, 1]$在规定$\vee = \max$，$\wedge = \min$，$* = \cdot$(通常的乘法)的条件下构成格半群. 其中，$I = 1$，$O = 0$. 并且，若对任意的$a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$，规定运算：

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) &= (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2) \\
(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) &= (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2) \\
(a_1, a_2) * (b_1, b_2) &= (a_1 * b_1, a_2 * b_2)
\end{aligned}
$$

则可知$[0, 1]$的直积$[0, 1]^2$也构成格半群. 其中，$I = (1, 1)$，$O = (0, 0)$.

在格半群中，可知当$*$替换为$\wedge$时，格半群成为分配格.

---

1) 在格L中，对L的任意子集合都有上限、下限存在时，则称L为**完备格**. 例如，区间$[0, 1]$构成在普通顺序关系下的完备格，但自然数的全体并非完备格. 另外，显然有限格是完备格.

下面,使用格半群的概念来叙述 L-模糊关系的各种性质.

§3. L-模糊关系

L-模糊关系可作为模糊关系的扩张来进行讨论，与 L-模糊集的情形相同,可以作为映射来定义.

定义 所谓在直积空间 $X\times Y=\{(x, y)|x\in X, y\in Y\}$ 中的 **L-模糊关系 R**，是指在 $X\times Y$ 中的 L-模糊集,即映射

$$R:\ X\times Y\to L \tag{98}$$

其中, L 是格半群。另外，在 $X\times Y$ 中的 L-模糊关系 R，也有称为从 X 到 Y 的 L-模糊关系。

这里,主要是就 $X\times X$ 中的,即在 X 上的 L-模糊关系来进行讨论的. 对 $X\times Y$ 的情形也可同样进行.

关于 L-模糊关系的运算可以直接得到下述定义. 设 R_1, R_2 是 X 上的 L-模糊关系,对于任意的 $x, y\in X$ 有

包含 $R_1\subseteq R_2\Longleftrightarrow R_1(x, y)\leqslant R_2(x, y)$ (99)

并 $R_1\cup R_2\Longleftrightarrow (R_1\cup R_2)(x, y)$

$$= R_1(x, y)\vee R_2(x, y) \tag{100}$$

交 $R_1\cap R_2\Longleftrightarrow (R_1\cap R_2)(x, y)$

$$= R_1(x, y)\wedge R_2(x, y) \tag{101}$$

积 $R_1 * R_2\Longleftrightarrow (R_1 * R_2)(x, y)$

$$= R_1(x, y) * R_2(x, y) \tag{102}$$

并且,当 L 为布尔格的情形时,补模糊关系可如下定义:

补模糊关系 $\overline{R}\Longleftrightarrow \overline{R}(x, y)=\overline{R(x, y)}$ (103)

作为关系的运算，其中最重要的有合成运算，L-模糊关系的情形可如下定义:

设 R_1, R_2 为 X 上的 L-模糊关系则

合成 $R_1\circ R_2\Longleftrightarrow (R_1\circ R_2)(x, z)$

$$= \bigvee_y [R_1(x, y) * R_2(y, z)] \tag{104}$$

其中∨，∗是 L 上的上限、半群的运算.

但是，当 L 为分配格时，可以定义下面两种关系的合成. 亦即，在 (104) 式中，将∗替换为∧，便得 (105) 式，而且由于在分配格中∨与∧是对偶的关系，所以由 (105) 式中将∨与∧对换而得到 (106) 式的合成. 即

$$(R_1 \circ R_2)(x, z) = \bigvee_y [R_1(x, y) \wedge R_2(y, z)] \tag{105}$$

$$(R_1 \circ R_2)(x, z) = \bigwedge_y [R_1(x, y) \vee R_2(y, z)] \tag{106}$$

其中，∨，∧分别为分配格 L 中的上限，下限运算.

正象前面叙述的那样，区间 $[0, 1]$ 对 max，min，·(乘法)构成格半群，作为(104)式的特殊情况可得下面的合成，而且我们把这种合成称为极大积合成.

极大积合成

$$(R_1 \circ R_2)(x, z) = \max_y [R_1(x, y) \cdot R_2(y, z)] \tag{107}$$

由于区间 $[0, 1]$ 对于 max，min 构成分配格，所以作为 (105)，(106) 式的特殊情形，得到**极大·极小合成，极小·极大合成**. 特别是极大·极小合成也有作为模糊关系的合成而采用的(参照 (28) 式).

极大·极小合成

$$(R_1 \circ R_2)(x, z) = \max_y \min [R_1(x, y), R_2(y, z)] \tag{108}$$

极小·极大合成

$$(R_1 \circ R_2)(x, z) = \min_y \max [R_1(x, y), R_2(y, z)] \tag{109}$$

例 若把两个数字 x，y “相接近”这种模糊关系≈，表示为

$$\approx (x, y) = e^{-|x-y|}$$

则≈及≈的极大积合成[(107)式]便成为如下的形式，即设 $x, y, z \in [a, c]$，$x < z$，则有

$$\begin{aligned}
\approx^2(x, z) &= \max_y[\approx(x, y) \cdot \approx(y, z)] \\
&= \max_y[e^{-|y-x|} \cdot e^{-|z-y|}] \\
&= \underset{y \in [x,z]}{\mathrm{mxa}}[e^{-(y-x)} \cdot e^{-(z-y)}] \\
&= e^{-(z-x)} = \approx(x, z)
\end{aligned}$$

在 $X \times Y$ 上的 L-模糊关系 R 中，当 X，Y 是 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的有限集合时，设 $R(x_i, y_j)$ 为 $m \times n$ 矩阵。这样一来，L-模糊关系的合成就变成了矩阵的积。例如，设 L 为图 3 那样的布尔格的情形，若 L-模糊关系 R_1，R_2 表示为矩阵：

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_1 & O \\ a_2 & a_1 \\ I & a_2 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} a_2 & O \\ I & a_1 \end{bmatrix}$$

则 R_1 和 R_2 的合成 $R_1 \circ R_2$ 在(105)式的情形下，就成为：

$$\begin{aligned}
R_1 \circ R_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & O \\ a_2 & a_1 \\ I & a_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_2 & O \\ I & a_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 \wedge a_2) \vee (O \wedge I) & (a_1 \wedge O) \vee (O \wedge a_1) \\ (a_2 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge I) & (a_2 \wedge O) \vee (a_1 \wedge a_1) \\ (I \wedge a_2) \vee (a_2 \wedge I) & (I \wedge O) \vee (a_2 \wedge a_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} O \vee O & O \vee O \\ a_2 \vee a_1 & O \vee a_1 \\ a_2 \vee a_2 & O \vee O \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} O & O \\ I & a_1 \\ a_2 & O \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

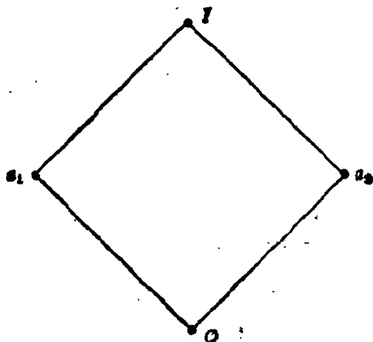


图3 L 的结构

上面定义了各种 L- 模糊关系的合成，而以后主要讲述(104)式的合成，亦即 L 为格半群的情形.

性质1 L-模糊关系的合成满足结合律，即设 R_1，R_2，R_3 为 L-模糊关系，则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3) \tag{110}$$

证明

$$\begin{aligned}
&[(R_1\circ R_2)\circ R_3][x,\omega]\\
&\quad=\bigvee_z[(R_1\circ R_2)(x,z)*R_3(z,\omega)]\\
&\quad=\bigvee_z\left[\left\{\bigvee_y[R_1(x,y)*R_2(y,z)]\right\}*R_3(z,\omega)\right]\\
&\quad=\bigvee_{z,y}[R_1(x,y)*R_2(y,z)*R_3(z,\omega)]\\
&\quad=\bigvee_y\left[R_1(x,y)*\left\{\bigvee_z[R_2(y,z)*R_3(z,\omega)]\right\}\right]\\
&\quad=\bigvee_y[R_1(x,y)*(R_2\circ R_3)(y,\omega)]\\
&\quad=[R_1\circ(R_2\circ R_3)](x,\omega)
\end{aligned}$$

恒等 L-模糊关系 E，可定义如下:

$$E(x, x') = \begin{cases} I & x = x' \\ O & x \neq x' \end{cases} \tag{111}$$

其中，I，O 分别表示格半群中的极大元(即单位元)、极小元(即零元)。若将 E 表示为矩阵，则所有的对角项均为 I，其余都是 0。

由此可推出下面的性质。

性质 2 设 E 为在 X 中的恒等 L-模糊关系，R 为在 X 中的任意的 L-模糊关系，则

$$E \circ R = R \circ E = R \tag{112}$$

证明

$$(E \circ R)(x, y) = \bigvee_{x'} [E(x, x') * R(x', y)]$$

$$= R(x, y)$$

另外，关于 L-模糊关系的合成，可得到下面的性质。

性质 3

1° $O \circ R = R \circ O = 0$[1] (113)

2° 若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

$$R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$$

$$R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2 \tag{114}$$

3° $R \circ \left(\bigcup_i R_i \right) = \bigcup_i (R \circ R_i)$

$$\left(\bigcup_i R_i \right) \circ R = \bigcup_i (R_i \circ R) \tag{115}$$

4° 设 $* = \wedge$，则

1) 0 是零关系，即对任意的 $x, x' \in X$，有 $0(x, x') = 0$

$$R\circ\left(\bigcap_i R_i\right)\subseteq\bigcap_i(R\circ R_i)$$

$$\left(\bigcap_i R_i\right)\circ R\subseteq\bigcap_i(R_i\circ R) \tag{116}$$

证明 因为1°，2°是显然的，故仅就3°，4°的前部分进行证明。

3°的证明：

$$\begin{aligned}
&\left[R\circ\left(\bigcup_i R_i\right)\right](x,z)\\
&=\bigvee_y\left[R(x,y)*\left(\bigcup_i R_i\right)(y,z)\right]\\
&=\bigvee_y\left[R(x,y)*\left\{\bigvee_i R_i(y,z)\right\}\right]\\
&=\bigvee_i\bigvee_y[R(x,y)*R_i(y,z)]\\
&=\bigvee_i(R\circ R_i)(x,z)\\
&=\left[\bigcup_i(R\circ R_i)\right](x,z)
\end{aligned}$$

4°的证明：

$$\begin{aligned}
&\left[R\circ\left(\bigcap_i R_i\right)\right](x,z)\\
&=\bigvee_y\left[R(x,y)*\left(\bigcap_i R_i\right)(y,z)\right]\\
&=\bigvee_y\left[R(x,y)*\left\{\bigwedge_i R_i(y,z)\right\}\right]\\
&=\bigvee_y\bigwedge_i[R(x,y)*R_i(y,z)]\\
&\leqslant\bigwedge_i\bigvee_y[R(x,y)*R_i(y,z)]
\end{aligned}$$

……根据极小极大不等式[1)]

1）极小极大不等式：$\bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}x_{ij}\right)\leqslant\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n}x_{ij}\right)$

$$= \bigwedge_i (R \circ R_i)(x, z)$$

$$= \left[\bigcap_i (R \circ R_i) \right](x, z)$$

其中，$* = \wedge$.

L-模糊关系R的逆L-模糊关系，记为R^c，可定义如下：

$$R^c(y, x) = R(x, y) \tag{117}$$

由此可导出下面的性质：

性质 4

1° $(R_1 \circ R_2)^c = R_2^c \circ R_1^c$ (118)

2° $\left(\bigcup_i R_i\right)^c = \bigcap_i R_i^c$

$\left(\bigcap_i R_i\right)^c = \bigcap_i R_i^c$ (119)

3° $(R^c)^c = R$ (120)

证明

1° 的证明：

$$(R_1 \circ R_2)^c(x, z)$$

$$= (R_1 \circ R_2)(z, x)$$

$$= \bigvee_y [R_1(z, y) * R_2(y, x)]$$

$$= \bigvee_y [R_1^c(y, z) * R_2^c(x, y)]$$

$$= \bigvee_y [R_2^c(x, y) * R_1^c(y, z)]$$

$$= (R_2^c \circ R_1^c)(x, z)$$

2° 的证明：

$$\left(\bigcup_i R_i\right)^c(y, x) = \left(\bigcup_i R_i\right)(x, y) = \bigvee_i R_i(x, y)$$

$$= \bigvee_i R_i^c(y,x) = \left(\bigcup_i R_i^c\right)(y,x).$$

所谓 L-模糊关系 R 是**可逆**的，是指存在 L-模糊关系 T，使得

$$R \circ T = T \circ R = E \tag{121}$$

这种情形可记作 $T = R^{-1}$，E 是恒等关系。

例 格半群采用 $[0,1]^2$，$*$ 是使 $(a_1, a_2)*(b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$ 的运算，其中 $a_i, b_i \in [0,1]$，"$\cdot$"是普通乘法。并且，$R_{(i,j)}$ 由

$$R_{(i,j)} = \begin{cases}(1,0) & i \neq j \\ (0,1) & i = j\end{cases}$$

给出。把它表示为矩阵，则为

$$R = \begin{bmatrix}(0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1)\end{bmatrix}$$

这时 R 的可逆矩阵 R^{-1} 是 R，即 $R = R^{-1}$.

例如，$$R \circ R = \begin{bmatrix}(0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1)\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}(0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(0,1)*(0,1) \vee (1,0)*(1,0) \\ (1,0)*(0,1) \vee (0,1)*(1,0)\end{bmatrix.$$

$$\times \begin{matrix}(0,1)*(1,0) \vee (1,0)*(0,1) \\ (1,0)*(1,0) \vee (0,1)*(0,1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(0,1) \vee (1,0) & (0,0) \vee (0,0) \\ (0,0) \vee (0,0) & (1,0) \vee (0,1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1)\end{bmatrix} = E$$

由上可知，$R^{-1} = R$.

性质 5 如果可逆的 L-模糊关系存在则是唯一的. R 如果是可逆的，则 R^{-1} 也是可逆的，$(R^{-1})^{-1} = R$. 如果 R_1,

R_2 是可逆的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是可逆的，$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ 成立。

在上例中，运算 * 具有**零因子**，即存在 $a * b = 0$，而 $a, b \neq 0$。运算 * 不存在零因子时有下述性质：

性质 6 在运算 * 不存在零因子的情形下，可逆的 L-模糊关系成为 1-1 上的映射。

当可逆的 L-模糊关系存在时，一般地有下面的性质：

性质 7 如果 L-模糊关系 R 的逆 R^{-1} 存在，则 $R^{-1} = R^c$。

下面简单地说明一下 L-模糊关系的对称性和传递性。

所谓 L-模糊关系 R 是**对称的**，是指

$$R = R^c$$

成立；所谓**传递的**，是指

$$R \circ R \subseteq R$$

成立。

性质 8 对称的 L-模糊关系的并（$\cup$），以及交（$\cap$），也是对称的。

证明 若设 L-模糊关系 R_i 是 $R_i = R_i^c$，则

$$\left(\bigcup_i R_i\right)^c = \bigcup_i R_i^c = \bigcup_i R_i$$

可见，关于并是对称的。

性质 9 传递的 L-模糊关系的交（$\cap$），也是传递的。其中令 $* = \wedge$。

证明 设 L-模糊关系是 $R_i \circ R_i \subseteq R_i$ 的关系则

$$\bigcap_i R_i \circ \bigcap_i R_i \subseteq \bigcap_i \left(R_i \circ \bigcap_j R_j\right) \subseteq \bigcap_i (R_i \circ R_i) \subseteq \bigcap_i R_i$$

性质 10 对所有 L-模糊关系来说，

1° 存在包含 R 的最小的对称的 L-模糊关系；

2° 存在包含 R 的最小的传递的 L-模糊关系；

3° 存在包含于R中的最大的对称的 L-模糊关系.

证明 1° 对 1° 来说，设 Q 是满足 $R\subseteq S$ 的所有对称的 L-模糊关系的集合. 但是,因为全称关系 $U(U(x, y)=I)$ 是 $U\in Q$ 的,所以 $Q\neq\varnothing$. 根据性质 8,则 $S_0=\bigcap\{S|S\in Q\}$ 就成为所要寻求的包含 R 的对称的 L-模糊关系. 2°, 3° 的证明亦可同样进行.

§ 4. L-模糊映射

如果设 R_1 是在 $V\times X$ 中的 L-模糊关系，R_2 是在 $X\times Y$ 中的 L-模糊关系，那么，R_1 与 R_2 的合成可定义为 (104) 式那样，亦即可定义为:

$$(R_1\circ R_2)(v, y) = \bigvee_x [R_1(v, x)*R_2(x, y)] \tag{122}$$

其中，R_1: $V\times X\to L$, R_2: $X\times Y\to L$, L 是格半群. (122) 式中的运算 $\vee$, $*$ 分别是在格半群 L 中的上限运算，半群运算.

但是，在 R_1 的定义域 $V\times X$ 中，V 是由唯一的元素组成时，则 L-模糊关系 R_1 可以看成是在 X 中的 L-模糊集. 这样一来，由 (122) 式可知，R_1 与 R_2 的合成 $R_1\circ R_2$ 成为在 Y 中的 L-模糊集. 因此，X 中的 L-模糊集 R_1 成为由 L-模糊关系 R_2 到 Y 中的 L-模糊集 $R_1\circ R_2$ 的映射. 由此，把这样的 L-模糊关系 R_2 称为 **L-模糊映射**.

概括上面所讲的，我们可得下面定义.

定义 设 A 是 X 中的 L-模糊集，R 为从 X 到 Y (即在 $X\times Y$ 中) 的 L-模糊关系(映射)，则由 R 而产生的 A 的**象** (记为 $R[A]$) 是 Y 中的 L-模糊集，可如下定义:

$$R[A] \Longleftrightarrow R[A](y) = \bigvee_x [A(x) * R(x, y)] \tag{123}$$

显然，$k[A]$ 就是 $A \circ R$。

正象前面所谈过的那样，因为 L-模糊关系的合成能够表示为矩阵的积，所以(123)式可以表示为向量和矩阵的积。例如，设 L 为 $[0, 1]$，$\vee$ 为 max，$*$ 为 $\times$（普通乘法），$X=\{x_1, x_2, x_3\}$，$Y=\{y_1, y_2\}$，X 上的 L-模糊集 A 用向量 $[0.4, 0.6, 0.8]$ 表示，其中，$A(x_1)=0.4$，$A(x_2)=0.6$，$A(x_3)=0.8$。并且从 X 到 Y 的 L-模糊关系 R 表示为矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

在这里，$R(x_1, y_1)=0.1$，$R(x_1, y_2)=0.4$，$\cdots$。于是，由 R 产生的 A 的象 $R[A]$ 则为

$$\begin{aligned} R[A] &= [0.4, 0.6, 0.8] \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= [(0.4 \times 0.1) \vee (0.6 \times 0.2) \vee (0.8 \times 0.3), \\ &\quad (0.4 \times 0.4) \vee (0.6 \times 0.5) \vee (0.8 \times 0.6)] \\ &= [0.04 \vee 0.12 \vee 0.24, 0.16 \vee 0.3 \vee 0.48] \\ &= [0.24, 0.48] \end{aligned}$$

$R[A]$ 成为使 $R[A](y_1)=0.24$，$R[A](y_2)=0.48$ 的 Y 中的 L-模糊集。

同样地，L-模糊集的逆象可定义如下。

定义 设 R 为从 X 到 Y 的 L-模糊关系，B 为 Y 中的 L-模糊集，则由 R 产生的 B 的**逆象**（记为 $R^c[B]$）是 X 中的 L-模糊集，可定义为：

$$R^c[B] \Longleftrightarrow R^c[B](x)$$

$$= \bigvee_y [R(x, y) * B(y)] \qquad (124)$$

这种情形若用矩阵表示，则 B，$R^c[B]$ 表现为列向量．例如，设 R 为前例的 R，B 为 $\begin{bmatrix}0.24\\0.48\end{bmatrix}$，则这里的 B 即为前例中的 $R[A]$．于是

$$R^c[B] = \begin{bmatrix}0.1 & 0.4\\0.2 & 0.5\\0.3 & 0.6\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0.24\\0.48\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(0.1 \times 0.24) \vee (0.4 \times 0.48)\\(0.2 \times 0.24) \vee (0.5 \times 0.48)\\(0.3 \times 0.24) \vee (0.6 \times 0.48)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0.192\\0.24\\0.288\end{bmatrix}$$

并且 $R^c[B]$ 成为使 $R^c[B](x_1) = 0.192$，$R^c[B](x_2) = 0.24$，$R^c[B](x_3) = 0.288$ 的 X 中的 L-模糊集．但是，请注意，由于 B 是前例中的 $R[A]$，故有 $R^c[B] = R^c[R[A]]$，$A \supseteq R^c[R[A]]$．

根据 L-模糊关系的合成的性质（(118) 式）$(R_1 \circ R_2)^c = R_2^c \circ R_1^c$，可知逆象也可以由下面的定义给出：

$$R^c[B] = (B^c \circ R^c)^c \qquad (125)$$

下面，让我们列举几个 L-模糊集的象及逆象的性质．

设 R 为从 X 到 Y 的 L-模糊关系，A_i，B_i 分别为 X，Y 中的 L-模糊集，则

(1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow R[A_1] \subseteq R[A_2]$ (126)

(2) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow R^c[B_1] \subseteq R^c[B_2]$ (127)

(3) $R[A_1\cup A_2]=R[A_1]\cup R[A_2]$ (128)

(4) $R^c[B_1\cup B_2]=R^c[B_1]\cup R^c[B_2]$ (129)

(5) $R[A_1\cap A_2]\subseteq R[A_1]\cap R[A_2]$ (130)

(6) $R^c[B_1\cap B_2]\subseteq R^c[B_1]\cap R^c[B_2]$ (131)

但是$*=\wedge$

(7) $R[\varnothing]=\varnothing,\ R^c[\varnothing]=\varnothing$ (132)

(8) $R_1\subseteq R_2\Rightarrow R_1[A]\subseteq R_2[A]$ (133)

$\Rightarrow R_1^c[B]\subseteq R_2^c[B]$ (134)

(9) $(R_1\cup R_2)[A]=R_1[A]\cup R_2[A]$ (135)

(10) $(R_1^c\cup R_2^c)[B]=R_1^c[B]\cup R_2^c[B]$ (136)

(11) $(R_1\cap R_2)[A]\subseteq R_1[A]\cap R_2[A]$ (137)

(12) $(R_1^c\cap R_2^c)[B]\subseteq R_1^c[B]\cap R_2^c[B]$ (138)

其中$*=\wedge$

(13) $0[A]=\varnothing$[1], $0^c[B]=\varnothing$ (139)

证明 简单地进行证明．例如，证明(128)式：

$$R[A_1\cup A_2](y)=\bigvee_x[(A_1\cup A_2)(x)*R(x,y)]$$

$$=\bigvee_x[(A_1(x)\vee A_2(x))*R(x,y)]$$

$$=\bigvee_x[(A_1(x)*R(x,y)]\vee(A_2(x)*R(x,y))]$$

$$=\bigvee_x[A_1(x)*R(x,y)]\vee\bigvee_x[A_2(x)*R(x,y)]$$

$$=R[A_1](y)\vee R[A_2](y)$$

又如，令(138)式中的$*=\wedge$，由此得

$(R_1^c\cap R_2^c)[B](x)$

$$=\bigvee_y[(R_1^c\cap R_2^c)(x,y)\wedge B(y)]$$

1) $\varnothing$是空集，0是零关系．

$$= \bigvee_y [R_1^c(x,y) \wedge R_2^c(x,y) \wedge B(y)]$$

$$\leqslant \bigvee_y [R_1^c(x,y) \wedge B(y)] \wedge \bigvee_y [R_2^c(x,y) \wedge B(y)]$$

$$= R_1^c[B](x) \wedge R_2^c[B](x)$$

其他证明也大致相同，故从略.

性质 设A是X中的L-模糊集，S是从X到Y的L-模糊关系，R是从Y到Z的L-模糊关系，则

$$(S \circ R)[A] = A \circ S \circ R = R[S[A]] \tag{140}$$

性质 设A是X上的L-模糊集，R是从Y到X的函数的L-模糊关系，R^c是R的逆关系，则

$$R[R^c[A]] = A \circ R^c \circ R \subseteq A \tag{141}$$

性质 设A是X中的L-模糊集，R是从Y到X的函数的L-模糊关系，并设L-模糊关系的合成$\circ$中$* = \wedge$，则根据$\vee$与$\wedge$是对偶的，将$\vee$和$\wedge$对换我们可以定义不同于(106)[1]式那样的合成运算$\hat{\circ}$，由此可导出

$$A \circ R^c \circ R \subseteq A \subseteq A \,\hat{\circ}\, R^c \,\hat{\circ}\, R \tag{142}$$

其中，$* = \wedge$.

以上，关于L-模糊映射的各种性质就讲这些. 下面再根据L-模糊集和L-模糊关系的概念来讨论一下L-模糊逻辑.

§5. L-模糊逻辑

一般的2值逻辑，只限于讨论事先规定为真、伪二者之一的命题. 但是，实际上结论不限于真、伪的命题是很多的. 例如，"x是矮子"这个命题，很明显不能只从真、伪的角度来讨论. 在研究解决这种不分明的命题中，模糊集以及更一般地

---

1) $(R_1 \hat{\circ} R_2)(x,z) = \bigwedge_y [R_1(x,y) \vee R_2(y,z)]$.

L-模糊集的概念，将起重要的作用。

对一般地2值逻辑来说，设 $X=\{x\}$ 为定义域，$\{0,1\}$为值域(即 1=真，0=伪)，则命题 $P(x)$ 可表示为一元函数. 把它称为一元谓词. 更一般地把它定义在直积 $X^n = X\times X\times\cdots\times X$ 上，具有值域 $\{0,1\}$ 的函数 $P: X^n\to\{0,1\}$，亦即 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 n 元谓词。

若把2值逻辑中 n 元谓词的值域 $\{0,1\}$ 换为某一半序集，则可以扩张定义如下的 n 元 L-模糊谓词.

定义 所谓 **n 元 L-模糊谓词**(简称为 **n 元 L-谓词**)，是指设 L 为某半序集时，有

$$P:\ X^n\to L \tag{143}$$

这样的函数。

由此可知，一元 L-谓词就成了 X 上的 L-模糊集，二元 L-谓词就成了所谓 L-模糊关系.

当 $L=[0,1]$ 时，有的把 n 元 L-谓词称为 J——谓词.

例 我们知道"x 是矮子"显然是模糊的命题. 令它是一元 J——谓词，即设它是用模糊集 S 来表示的. 也就是说，用 $S(x)$ 表示 x 的个子低的程度，如果低，则 $S(x)$ 的值就接近于1；如果高，则接近于0. 另外，"x 看起来象 y"这样的命题也是模糊的，可表示为二元 J——谓词，即模糊关系 $R(x,y)$. 考虑用到这两个命题 S, R 的命题 $P(x)$，即"x 是矮子并且看起来象 y"，例如 $P(x)$ 可表示为

$$P(x)=S(x)\wedge R(x,y)$$

这里，$\wedge$就是把"and"模式化了的东西，并规定取$S(x)$和$R(x,y)$中值最小的那个. 同样地，"或"是用"$\vee$"表示的. 但是，因为在这种例子中所谓"矮"和"看起来象"有相关关系，所以为了

表示它，采用以乘法 · 代替 $\wedge$ 的方法是合适的[1]. 亦即

$$P(x)=S(x)\cdot R(x,y)$$

一般地认为，在用语言叙述的情形下，表示“并且”时，与其使用“$\wedge$”不如使用“ · ”更好些. 但是，在乘法的情形

$$a\cdot b\leqslant a\wedge b \tag{144}$$

成立，这时表示“或”的运算，可以对偶地表示为

$$a\hat{\cdot}b=1-(1-a)\cdot(1-b)=a+b-a\cdot b \tag{145}$$

很明显，有

$$a\hat{\cdot}b\geqslant a\vee b \tag{146}$$

下面考虑命题 K:“x看来象是住在 y 附近的一个人”. 如果用模糊关系N来表示 “住在附近”，那么命题 $K(x)$ 就是模糊关系的合成，亦即用 (107) 式的极大积可如下表示:

$$R\circ N(x,y)=\bigvee_{z}[R(x,z)\cdot N(z,y)]$$

可以引进从二个一元 J——谓词变换为一个二元 J——谓词的运算 π. 设 A, B 为一元 J——谓词，则可以变换为 $(A\pi B)(x,y)=A(x)\wedge B(y)$ 的二元 J——谓词. 例如，设 B 为命题“y 是秃顶的人”，那么命题“x 是矮子并且 y 是秃子”可表示为 $S\pi B(x,y)$. 这种运算 π 的用处是多种多样的. 如设 I 为“y 是人”这样的谓词，那么 $B\pi I(x,y)$ 就成为 $B(x)$，即“x 是矮子”.

设命题 Q:“x 是矮子并看起来象是住在 y 附近的秃子”是给定的命题，那么可使命题Q表示为

$$S(x)\wedge[(R\wedge(B\pi I))\circ N(x,y)]$$

特别地，$R\wedge(B\pi I)(x,z)=R(x,z)\wedge B(z)$，并可表示为“象是秃子”. 把上式改写一下，即为

---

1) 请注意: 在 [0, 1] 区间，若除了 max, min 运算之外，还采用 ● (乘法)，则 [0, 1] 在这些运算之下构成格半群.

$$S(x) \wedge \bigvee_{z} [R(x,z) \wedge B(z)] \cdot N(z, x)$$

使用分配律，并将 $\vee$ 换写为 sup，$\wedge$ 换写为 min，则

$$\sup\{\min[S(x), R(x,z) \cdot N(z, y),$$
$$B(z) \cdot N(z, y)] \mid z \in X\}$$

这可表示为“x 是矮子并看起来象是住在 y 附近的一个秃顶的人”，显然它与方才提到的命题 Q 是等价的.

在 L-模糊逻辑中，若将命题 A 的真值表示为 $[A]$，则 $[A] \in L$，并集、交集、蕴涵、否定、积等可表示如下：

1° $[A \vee B] = [A] \vee [B]$ (147)

2° $[A \wedge B] = [A] \wedge [B]$ (148)

3° $[A \Rightarrow B] = [A] \rightarrow [B]$ (149)

4° $[\neg A] = [A]'$ (150)

5° $[A * B] = [A] * [B]$ (151)

6° $A \subseteq B \Leftrightarrow [A] \leqslant [B]$ (152)

7° $A \equiv B \Leftrightarrow [A] = [B]$ (153)

在 L-模糊逻辑中，上式的 3°、4° 即蕴涵、否定可定义如下：

设 L 为格半群，$a, b, x \in L$，则蕴涵→可定义[1]为

$$a \rightarrow b = V\{x \mid a * x \leqslant b\} \tag{154}$$

其中，$*$ 是半群的运算.

例如，设 $L = [0, 1]$，$\vee = \max$，$* = \cdot$（乘法）则蕴涵为

$$a \rightarrow b = \begin{cases} b & a > b \\ a & \\ I & a \leqslant b \end{cases} \tag{155}$$

---

1) 当 L 为分配格时，且 $* = \wedge$，则蕴涵成为 $a \rightarrow b = \vee\{x \mid a \wedge x \leqslant b\}$ 即与直觉主义逻辑（布劳威尔逻辑）的情形相同. 并且，当 L 为布尔代数的情形，显然可得出蕴涵的公式：

$$a \rightarrow b = a \vee b$$

根据蕴涵→的使用，推理方式可给出如下：

$$a * (a \to b) \leqslant b \tag{156}$$

并且，否定可表示为

$$a' = a \to 0 \tag{157}$$

亦即 $a' = \bigvee\{x | a * x = 0\}$.

下面，来讲关于蕴涵、否定的基本性质.

性质 设 L 为格半群，并设 $a, b, c, x, a_i, b_i \in L$，则

$$a * x \leqslant b \Longleftrightarrow x \leqslant (a \to b) \tag{158}$$

$$a \to I = I,\ 0 \to a = I,\ I \to b = b \tag{159}$$

$$(a \to b) * (b \to c) \leqslant (a \to c) \tag{160}$$

$$\left(\bigvee_i a_i\right) \to b = \bigwedge_i (a_i \to b) \tag{161}$$

$$a \to \left(\bigwedge_i b_i\right) = \bigwedge_i (a \to b_i) \tag{162}$$

$$(a \to (a * b)) \geqslant b \tag{163}$$

$$(a * b) \to c = b \to (a \to c) \tag{164}$$

$$\bigvee_i (a_i \to b) \leqslant \left(\bigwedge_i a_i\right) \to b \tag{165}$$

$$\bigvee_i (a \to b_i) \leqslant a \to \left(\bigvee_i b_i\right) \tag{166}$$

如果 $a \geqslant b$，则

$$(a \to c) \leqslant (b \to c),\ (c \to a) \geqslant (c \to b) \tag{167}$$

并且，对否定的情形，L 为可换的格半群[1]时，可得到下面的公式：

$$0' = I,\quad I' = 0 \tag{168}$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a' \geqslant b' \tag{169}$$

$$a'' \geqslant a,\ a''' = a' \tag{170}$$

1）所谓半群的运算 $*$ 是可换的，即指的是 $a * b = b * a$ 成立的格半群.

$$x \leqslant a' \Longleftrightarrow a * x = 0 \tag{171}$$

$$\left(\bigvee_i a_i\right)' = \bigwedge_i a_i' \tag{172}$$

$$\bigvee a_i' \leqslant \left(\bigwedge_i a_i\right)' \tag{173}$$

当全称记号∀,存在记号∃被包含在 L-模糊逻辑的命题中时,设它们可如下给出:

$$[\exists x P] = \bigwedge_x [P(x)] \tag{174}$$

$$[\forall x P] = \bigwedge_x [P(x)] \tag{175}$$

于是，根据(147)—(153)、(174)、(175)式，则下式成立:

$$(A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C) \tag{176}$$

$$((\exists x A(x)) \Rightarrow B) \equiv \forall x(A(x) \Rightarrow B) \tag{177}$$

$$(A \Rightarrow \forall x B(x)) \equiv \forall x(A \Rightarrow B(x)) \tag{178}$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \tag{179}$$

$$\exists x(A(x) \Rightarrow B) \subseteq (\forall x A(x)) \Rightarrow B \tag{180}$$

$$\exists x(A \Rightarrow B(x)) \subseteq A \Rightarrow \exists x B(x) \tag{181}$$

$$A \subseteq \neg\neg A, \ \neg\neg\neg A \equiv \neg A \tag{182}$$

$$\neg(\forall x A(x)) \supseteq \exists x \neg A(x) \tag{183}$$

$$\neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg A(x) \tag{184}$$

另外,若将 $A \Longleftrightarrow B$ 表示为

$$A \Longleftrightarrow B = (A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow A) \tag{185}$$

则可知下式为重言式

$$((A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{186}$$

$$((\exists x A(x)) \Rightarrow B) \Longleftrightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B) \tag{187}$$

$$(A \Rightarrow \forall x B(x)) \Longleftrightarrow \forall x(A \Rightarrow B(x)) \tag{188}$$

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow (A * B)) \tag{189}$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \tag{190}$$

$$(\exists x(A(x) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\forall x A(x)) \Rightarrow B) \tag{191}$$

$$(\exists x(A \Rightarrow B(x))) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists x B(x)) \tag{192}$$

$$A \Rightarrow \neg\neg A, \quad \neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A \tag{193}$$

$$(\exists x \neg A(x)) \Rightarrow \neg(\forall x A(x)) \tag{194}$$

$$\neg(\forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg B(x) \tag{195}$$

以上，因为对于 L-模糊逻辑成立的从(158)到(195)的各种性质的证明均与2值逻辑大体相同，故省略之。

L- 模糊集与模糊集相比，由于在值域上使用的是较为一般的代数系统，所以它具有丰富演算体系的优点，应用范围也可望更为广泛，这是有待今后加以研究的。

结　束　语

作为一种尝试，把现实中的大量存在的不分明事件作出数量表示的是，1965 年加利福尼亚大学的查德教授发表的模糊集论。从那以后，世界各国学者继续进行了关于模糊理论的研究(请参看书末所附的文献)。

但是，直到 1973 年，关于模糊理论的研究实际上还没有脱离纯理论的领域，远远没有达到人们赞颂的“不分明事项的数量表现”的程度。后来，关于模糊理论的实际应用的研究成果逐渐有所发表，今后随着软科学的发展，这方面的研究活动必将更加活跃。

参　考　文　献

(按年代顺序)

[1] Zadeh, L. A.: "Fuzzy sets", Information and Control, 8, 338—358, 1965.

[2] Zadeh, L. A.: "Fuzzy sets and systems", Proc. of the Symposium on System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 29—39, 1965.

[3] Bellman, R. E., Kalaba, R. and Zadeh, L. A.: "Abstraction and pattern classification", Journal of Mathematical Analysis and Application, 13, 1—7, 1966.

[4] Zadeh, L. A.: "Shadows of fuzzy sets", Problems in Transmission of Information (in Pussian), 2, 37—44, March, 1966.

[5] Goguen, J. A.: "L-fuzzy sets", J. of Math. Anal. and Appl., 18, 1, 145—174, 1967.

[6] Wee, W. G.: "On Generalization of Adaptive Algorithm and Application of the Fuzzy Sets Concept to Pattern Classification", Ph. D. Dissertation, Purdue Univ., 1967.

[7] Santos, E. S. and Wee, W. G.: "General lormulation of sequential machines", Inform Control, **12**, 5—10, 1968.

[8] Zadeh, L. A.: "Fuzzy algorithms", Inform. Control, 12, 94—102, 1968.

[9] Zadeh, L. A.: "Probability measures of fuzzy events", J. Math. Anal. Appl., 23, 421—427, 1968.

[10] Nasu, M., and Honda, N.: "Fuzzy events realized by finite probabilistic automata", Inform. Control, 12, 284—303, 1968.

[11] Chang, C. L.: "Fuzzy topological spaces", J. Math. Anal. Appl., 24, 182—190, 1968.

[12] Hirai, H., Asai, K. and Kitajima, S.: "Fuzzy Automaton and its Application to Learning Control Systems", Memoirs of the Faculty of Engineering. Osaka City University, 10, 67—73, 1968.

[13] Santos, E. S.: "Mazimun automata", Inform. Control, 13, 363—377, 1968.

[14] Goguen, J. A.: "The logic of inexact concepts", Synthese, 19, 329—373, 1968.

[15] Marinos, P. N.: "Fuzzy logic and its application to switching systems", IEEE Trans. on Comp., C-18, 9, 343—348, 1969.

[16] Chang, S. S. L.: "Fuzzy dynamic programming and the decision making process", Proc. 3d Princeton Conference on Information Sciences and Systems, 200—203, 1969.

[17] Tsichritzis, D.: "Fuzzy computability", ibid, 1969.

[18] Wee, W. G. and Fu, K. S.: "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems", IEEE Trans. on SSC, SSC-5, 215—223, 1969.

[19] Mizumoto, M., Toyoda, J. and Tanaka, K.: "Some considerations on fuzzy automata", J. of Comp. and Sys. Sci., 3, 4, 409—422, 1969.

[20] Lee, E. T. and Zadeh, L. A.: "Note on fuzzy languages", Inform. Sciences, 1, 421—434, 1969.

[21] 水本，豊田，田中: "Fuzzy 言语，信学論 (C), 53-C, 5, 333—340, 1970.

[22] Gitman, I and Levine, M. D.: "An algorithm for detecting unimodal fuzzy sets and its application as a clustering technique", IEEE Trans. on Comp., C-19, 7, 583—593, 1970.

[23] Diimitroy, V. D. "GMDH algorithms on fuzzy sets of Zadeh", Soviet Automatic Control. 3, 4, 40—45, 1970.

[24] 田中，豊田，水本，让: "すいまいオートマン理論とその制御への応用"，制御工学，14，9，541—550. 1970.

[25] 北嶋，浅居: "すいまいオートマトンにとる学習"，制御工学 14，9，551—592，1970.

[26] E. H. Ruspini: "Numerical methods for fuzzy clustering", Inform. Sciences, 2, 319—350, 1970.

[27] Santos, E S.: "Fuzzy algorithms", Inform. Control, 17, 326—339, 1970.
[28] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A.: "Decision-making in a fuzzy environment", Management Sciences, 17, 4. 141—164, 1970.
[29] Tamura, S., Higuchi, S. and Tanaka, K.: "Pattern classification based on fuzzy relations", IEEE Trans. on SMC, SMC-1, 1, 61—66, 1571.
[30] Brown, J. G.: "A note on fuzzy sets", Information and Control 18, 32—39, 1971.
[31] Mizumoto, M.: "Fuzzy Automata and Fuzzy Grammars", Ph. D. Thesis, Osaka University, February, 1971.
[32] Zadeh, L. A.: "Quantitative fuzzy semantics", Inform, Sciences, 3, 156—176, 1971.
[33] Zadeh, L. A.: "Similarity relations and fuzzy orderings", Inform. Sciences, 3, 177—200, 1971.
[34] Zadeh, L. A.: "Toward a theory of fuzzy systems", in Aspects of Network and System Theory (ed. by R. E. Kalman and N. Declaris), Holt, Rinehart and Winston, 1971.
[35] Chang, S. K.: "Fuzzy programs-Theory and applications", Proc. Brooklyn Polyt. Inst. Symp. on Comp. and Automata", 21, 1971.
[36] 本多: "ファジイ集合",信学誌,54,10,1359—1363,1971.
[37] Lee, R. C. T. and Chang, C. L.: "Some properties of fuzzy logic", Inform. Control, 19, 5, 417—431, 1971.
[38] Siy, P. and Chen, C. S.: "Minimization of fuzzy functions", IEEE Trans. on Comp., C-12, 1, 100—102, 1972.
[39] Chang, S. S. L. and Zadeh, L. A.: "Fuzzy mapping and control", IEEE Trans. on SMC, SMC-2, 30—34, 1972.
[40] 辻,水本,豊田,田中: "ランダム媒体と可変構造 fuzzy オートマトンとの相互作用", 信学論 (D), 55—D, 2, 143—144. 1972.
[41] 菅野: "Fuzzy 測度と Fuzzy 積分", 計測自動制御学会論文集, 8, 2, 218-226, 1972.
[42] 田中: "類推とファジイ論理", 数理科学, 12—19, 3月, 1972.
[43] 志村: "Fuzzy 関数のパターン認識への応用", 信学論 (D), 55-D, 3 218—225, 1972.
[44] 水本, 豊田, 田中: "General formuration of formal grammars", Inform. Sciences, 4, 87—100, 1972.
[45] Asai, K. and Kitajima, S.: "Optimizing, control using fuzzy automata", Automatica, 8, 101—104, 1972.
[46] DeLuca, A. and Termini, S.: "A definition of nonprobabilistic entropy in the setting to fuzzy sets theory", Inform. Control, 20, 301—312, 1972.
[47] Santos, E. S.: "Max-product machines", J. Math. Anal. Appl., 37,

677—686, 1972.

[48] 向殿: "Fuzzy 論理に対する二，三の性質"，信学会オートマトン研資，1972.

[49] Lientz, B. P.: "On time dependent fuzzy sets", Inform. Sciences, 4, 367—376, 1972.

[50] DeLuca, A. and Termini, S.: "Algebraic properties of fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl., 40, 373—386, 1972.

[51] Lee, R. C. T.: "Fuzzy logic and the resolution principle", J. ACM, 19, 109—119, 1972.

[52] Zadeh, L. A.: "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", IEEE Trans. on SMC, SMC-3, 1, 28—44, 1973.

[53] Tamura, S. and Tanaka, K.: "Learning of fuzzy formal languages", IEEE Trans. on SMC, SMC-3, 1, 98—102, 1973.

[54] Mizumoto, M., Toyoda, J. and Tanaka, K.: N-fold fuzzy grnmmars", Inform. Sciences, 5, 25—43, 1973.

[55] Bellman, R. and Giertz, M.: "On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets", Inform. Sciences, 5, 149—156, 1973.

[56] 菅野: Fuzzy 測度の構成と Fuzzy 積分によるあいまいなパターン類似度評価"，計測自動制御学会論文集，9，3，359—367，1973.

[57] 辻，水本，豊田，田中: 線形 fuzzy オートマトン，信学論 (A)，56-A，4，256—257，1973.

[58] Kandel, A.: "Comment on an algorithm that generates fuzzy prime implicants by Lee and Chang", Inform Control, 23, 279—282, 1973.

[59] 古東 平松: "Fuzzy 集合によるパターンクラスの記述について，"信学論(D)，56-D，5，275—282，1973.

[60] Mizumoto, M., Toyoda, J. and Tanaka, K.: "Formal grammars witht weights", Inform. Processing Letters, 2, 3, 74—78, 1973.

[61] 金，水本，豊田，田中: "L-Fuzzy 文法"，信学論(D)(採録決定).

附　　录

论模糊推理

§1. 引　　言

本文着重阐述模糊逻辑理论和模糊推理的一种方法．这种方法是为了研究自然语言中包含模糊术语的那一特殊部分．在这之前有必要首先给出“模糊逻辑”一词的定义．这是因为，近年来随着有关模糊理论文献的增加，所谓“模糊逻辑”一词，已在各种各样的意义下被使用着．

根据比较新的B.R. 盖涅斯（Gaines）的文献［1，1978］，“模糊逻辑”已经在下面三种意义下被使用着．

（1）　把在模糊集合论［2，1965］以前提出的、用日常语言进行推理的根据，全部称为“模糊逻辑”．

（2）　把多值逻辑（从3值逻辑到无穷多值逻辑）全部或者其中一部分称为“模糊逻辑”，这里包括1型的模糊集论．

（3）　是在允许含有既不真也不假的真值的意义下，把模糊一定程度的多值逻辑的结构再进一序模糊化后，称为与自然语言［3，1975］相关联的模糊逻辑(以下记作F逻辑)．

上述的盖涅斯文献［1］，是在（2）意义下的研究成果，同时也阐述了在（3）的意义下研究F逻辑是极其重要的．当然，在（2）的意义下来使用的是最多的，其中R. 盖涅斯［4，1976］也指出了 Laleph-1[1)]（Lukasiewicz Infinite-Valued［卢

---

1) Laleph-1 指$L\aleph_1$，而$\aleph_1$是超穷集合中的浓度符号之一．

卡什维奇：无穷多值逻辑]）在F逻辑中所起的作用和古典逻辑在集合论基础中所起的作用是同样的．但是，另一方面，也有把下列系统称为F逻辑的情形，这种系统就是采用由高格恩（Goguen）[5，1968]搞的把否定、合取、析取的定义都同样作为蕴涵的定义的系统（西胁[6，1978]）．这样，即使在（2）的意义下，指哪个逻辑体系是F逻辑，也几乎因人而异，而不能够明确承认什么唯一的F逻辑．更进一步说，是否必须具有唯一的F逻辑系统，也处于不明确的状态．日本的塚本弥八郎认为，当可按(2)的意义来使用F逻辑一词时，把它作为多值逻辑之一是适宜的．

按(3)的意义来使用F逻辑一词，是最近查德（Zadeh）一直在研究着的问题，仅主要文献就有[3，7，8，9，10]，其最特殊之点，在于用语言真值作为对F命题给予的真值．

本文中介绍的F逻辑，是和查德的研究同出一辙的．关于模糊推理，主要阐述最近由塚本弥八郎提出的方法[11]．在本文中，虽然把F集合论作为已知的，但是，作为后文讨论的准备，还有必要先引入关于F逻辑的一些知识．

§2. F命题和F集合

在含有模糊谓词的判断中，以下列形式给出的判断称为F命题：

$$N\text{是}A \tag{1}$$

其中，N表示某对象的名称，设A表示用某种集合U的F集合给出的某种属性．

现在，作为$P \triangleq$“N是A”的真值，来考虑V的F集合，一般将此写成$\underline{P}=\tau$．其中，V是在无穷多值逻辑中，采用的数值真值的变域[0，1]，即对于F命题我们使用上述意义下的

真值．赋予这种F真值以语言的形式，比如，赋予很真实，不很假时，把它称为语言真值(以下简写为 LTV)．

例如，估计55岁左右的人，假定我们说：

"'He is old' is more or less true"[1]

则年老的是年令[0岁，110岁]的F集合，而比较真实是V的F集合，这样就变成了处理两种类型的模糊性．我们规定LTV全都用斜体书写，且它与V的F集合作如下的对应：

$$\text{真} \triangleq \int_{v \in V} v/v, \quad \text{假} \triangleq \int_{V} (1-v)/v$$

特别是

$$\text{全真} \triangleq \int_{[0,1)} 0/v + 1/1$$

$$\text{全假} \triangleq 1/0 + \int_{(0,1]} 0/v$$

$$\text{未知} \triangleq \int_{V} 1/v$$

其中$\int$与$+$表示并．

另外，可按普通1型(Type-1)的F集合论来定义与、或以及非，还可使用 Hedge，即用平方和开方的形式令：

$$\text{很真} = (\text{真实})^2$$

$$\text{比较真} = \sqrt{\text{真实}}$$

其次，我们来叙述一下扩张原理．将任意的映射f: $X \to Y$进一步扩张为从X的所有F子集族$\tilde{P}(X)$到$\tilde{P}(Y)$的映射f: $\tilde{P}(X) \to \tilde{P}(Y)$的方法称为扩张原理．关于$\forall A \in \tilde{P}(X)$，定义$f(A)$如下：

对每个$y \in Y$，

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{2}$$

1) 可译为："'他年老'这个判断是比较真实的"．

其中，$f^{-1}(y)=\varnothing$（空集）时，$\mu_{f(A)}(y)=0$.

另外，$g: X\times Y\to Z$ 的扩张 $g: \tilde{P}(X\times Y\to\tilde{P}(Z)$，在 $A\subset X$, $B\subset Y$ 时，对每个 $z\in Z$，有

$$\mu_{g(A,B)}(z)=\sup_{(x,y)\in g^{-1}(z)}[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)] \tag{3}$$

再叙述一下，在具体运算中成为必要的F集合的 α-水平集合。

X的F集合 A 的 α-水平集合 A_α 一般为下面的区间集合

$$A_\alpha=\{x\mid\mu_A(x)\geqslant\alpha\},\ \alpha\in(0,1] \tag{4}$$

从 A_α, $\alpha\in(0,1]$ 可以再构成 $\mu_A(x)$.

$$\mu_A(x)=\sup_{\alpha\in(0,1]}[\alpha\wedge\chi_{A_\alpha}(x)] \tag{5}$$

其中，χ_{A_α} 是 A_α 的定义函数.

下面再叙述一下真实性的评定 (Truth Qualification[8]). 现在，当给出 $P\triangleq$"他很老"和 $\underline{P}$=真实时，作为 $P'\triangleq$"他年老"的 LTV 也可以赋予很真实，这样做在直观上是可以理解的. 另外，为简单起见，我们假定"P"为真的就等于"P"，就是说，假定若在某F命题内附加上"真的"以后，原来的F命题判断的内容不变. 这样，上述事实可表示为下面的等价词义

$$\text{"他很老"}\cong\text{"'他年老'很真实"} \tag{6}$$

把上述事实一般化，假定，若 A、B 为 U 的 F 集合，则

$$\text{"'}N\text{是}A\text{'是}\tau\text{"}=\text{"}N\text{是}B\text{"} \tag{7}$$

是成立的. 把给定 A 与 τ 求 B 称作真实性的评定，同时，把给定 A 与 B 求满足 (7) 的 τ 称为真实性评定的逆. 它们分别在文献 Zadeh [7] 和 Sanchez [12] 里研究过. 若用式子写出，则分别成为

$$\mu_B(u)=\mu_\tau(\mu_A(u))\ \text{对每一个}\ u\in U \tag{8}$$

$$\mu_\tau(v)=\sup_{u\in\mu_A^{-1}(v)}\mu_B(u)\ \text{对每一个}\ v\in V \tag{9}$$

在式(9)中，当 μ_A 为从 U 到 V 一一对应的映射时，则有

$$\mu_\tau(v) = \mu_B(\mu_A^{-1}(v))$$

将此写成如下等价的式子:

$$\tau = \mu_A(B) \tag{10}$$

$\mu_A(B)$ 表示当判断"N 是 B"是真实时"N 是 A"的对应的 LTV。

§ 3. 模糊逻辑——Laleph-1 的模糊化

在 §1 里，在讲到的(3)的意义下的 F 逻辑时，曾指出必须有作为其基础的多值逻辑体系．对把 $V \triangleq [0, 1]$ 作为真值变域的逻辑体系，只是蕴涵就有几个不同的定义（文献 [13]）。设 P、Q、R 为命题，将其 NTV 写成 $|P|$ 或者 p，并按照通常的用法用 $\wedge$ 表示取极小 (min)，用 $\vee$ 表示取极大 (max)，这样一来，Laleph-1 的逻辑体系可表示如下:

$$|\neg P| = 1 - |P| \tag{11}$$

$$|P \text{ AND } Q| = |P| \wedge |Q| \tag{12}$$

$$|P \text{ OR } Q| = |P| \vee |Q| \tag{13}$$

$$|P \rightarrow Q| = (1 - |P| + |Q|) \wedge 1 \tag{14}$$

作为蕴涵的定义，另外还有如下一些:

$$\text{高格恩 } |P \rightarrow Q| = \begin{cases} 1 & \text{如果 } q \geqslant p \\ q/p & \text{如果 } q < p \end{cases} \tag{15}$$

$$\text{哥德尔 (Gödel) } |P \rightarrow Q| = \begin{cases} 1 & \text{如果 } q \geqslant p \\ q & \text{如果 } q < p \end{cases} \tag{16}$$

迪涅斯 (Dienes) 的 VSS: $|P \rightarrow Q| = (1 - p) \vee q$. (17)

这里，为了在 Laleph-1 体系中导入 LTV，照前述的扩张原理对(11)—(14)式进行扩张即可．定义函数 $f_1(p) \triangleq 1-p$，$f_2(p, q) \triangleq p \wedge q$，$f_3(p, q) \triangleq p \vee q$；$f_4(p, q) \triangleq (1 - p + q) \wedge 1$，若用 (2) 式，(3) 式即得下列结果：对每个 $r \in V$，有

$$\mu \underset{\sim}{R}_1(r) = \sup_{p \in f_1^{-1}(r)} \mu \underset{\sim}{P}(p) \tag{18}$$

$$\mu \underset{\sim}{R}_i(r) = \sup_{(p,q) \in f_i^{-1}(r)} [\mu P(p) \wedge \mu Q(q)], i = 2, 3, 4, \tag{19}$$

其中，$R_1 \triangleq$"$\neg P$"，$R_2 \triangleq$"P AND Q"，

$R_3 \triangleq$"P OR Q"，$R_4 \triangleq$"$P \rightarrow Q$"。

这样，F逻辑中的命题运算可用sup-min合成来记述。为了在给定$\underset{\sim}{P}$、$\underset{\sim}{Q}$时具体地计算出$\underset{\sim}{R}_i(i = 1, \cdots, 4)$，可将前面讲过的$\alpha$-水平集合当作媒介来进行。特别是当$\underset{\sim}{P}$、$\underset{\sim}{Q}$为$V$的正规凸的F集合时，可简单地写成如下形式：

对$\forall_\alpha \in (0, 1]$，有

$$\text{否定:}\quad \underset{\sim}{R}_{1\alpha} = 1 - \underset{\sim}{P}_\alpha \tag{20}$$

$$\text{合取:}\quad \underset{\sim}{R}_{2\alpha} = \underset{\sim}{P}_\alpha \wedge \underset{\sim}{Q}_\alpha \tag{21}$$

$$\text{析取:}\quad \underset{\sim}{R}_{3\alpha} = \underset{\sim}{P}_\alpha \vee \underset{\sim}{Q}_\alpha \tag{22}$$

$$\text{蕴涵:}\quad \underset{\sim}{R}_{4\alpha} = (\neg \underset{\sim}{P})_\alpha \boxplus \underset{\sim}{Q}_\alpha \tag{23}$$

其中，$\underset{\sim}{P}_\alpha$、$\underset{\sim}{Q}_\alpha$是一般的区间集合$[p_1, p_2]$、$[q_1, q_2]$，在区间集合之间使用的($-$，$\wedge$，$\vee$，$\boxplus$)等记号的意思是下列的运算：

$$1 - [p_1, p_2] \triangleq [1 - p_2, 1 - p_1]$$

$$[p_1, p_2] \underset{\bullet}{\wedge} [q_1, q_2] \triangleq [p_1 \wedge q_1, p_2 \wedge q_2]$$

$$[p_1, p_2] \vee [q_1, q_2] \triangleq [p_1 \vee q_1, p_2 \vee q_2]$$

$$[p_1, p_2] \boxplus [q, q_2] \triangleq [(p_1 + q_1) \wedge 1, (p_2 + q_2) \wedge 1]$$

另外，所谓$\underset{\sim}{P}$是正规的，意思是$\sup_{p \in V} \mu \underset{\sim}{P}(p) = 1$，所谓$\underset{\sim}{P}$是凸的 $P \in V$ 意思是

$$\mu \underset{\sim}{P}(y) \geqslant [\mu \underset{\sim}{P}(x) \wedge \mu \underset{\sim}{P}(z)] \text{ 对于 } \forall y \in [x, z].$$

这里，本应该给出(20)—(23)式的证明，但由于篇幅的关系而省略了。这个证明以及$\underset{\sim}{P}$，$\underset{\sim}{Q}$不满足正规凸的这一先决条件情形的讨论，可参照文献：Tsukamoto [11, 1979]。

还有，(18)，(19) 式的 F 逻辑体系，作为特殊情况，即给定 $P=1/p$，$Q=1/q$ 时，可还原为 Laleph-1. 再有，在 Laleph-1 里，p、q 只取 0 或 1 的任何一个值时，则还原为普通的 2 值逻辑，这一点是容易得到检验的. 因此，在给定命题的谓词是非模糊时，其真值性只是肯定或否定的情形也都包含在上述的 F 逻辑体系中. 在这种情形下，对于 2 值逻辑中的真与伪，作为 LTV 给出全真和全假就行了.

§4. 模糊推理的方法

在命题 P 以及 "$P \to Q$" 为真时，则命题 Q 为真. 在古典逻辑中，把这种演绎推理规则，叫作肯定前件的假言推理，因此可写成如下形式:

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q} \tag{24}$$

而且，它的对偶是否定后件的假言推理可写为

$$\frac{\neg Q \quad P \to Q}{\neg P} \tag{25}$$

在本文中，重点论述这两个演绎推理法则的扩张，即重点论述把上面命题作为 F 命题来给出的情形.

对应 (24) 式的 F 肯定前件的假言推理可写为

$$\frac{P_2 \quad P_1 \to Q_1}{Q_2} \tag{26}$$

与通常的肯定前件的假言推理的区别是，第一，各命题可以是 F 命题；第二，蕴涵式中的前提 (P_1) 和小前提 (P_2) 亦可不同，进而结论也是有 Q_1 与 Q_2 那样的不同之点. 这样的推理过程可以考虑分为以下三个阶段:

(i) 给出 P_2 和 P_1，求 $\underline{P_1}$;

(ii) 给出 $\underline{P_1}$ 及 $\underline{P_1 \to Q_1}$，求 $\underline{Q_1}$;

(iii) 由 $\underline{Q}_1$ 和 $\underline{Q}_1$ 求 Q_2.

(i) 和 (iii) 阶段，可以根据前面已讲过的真实性评定的手法，对于 (i) 用 (10) 式来求，对于 (iii) 用 (8) 式来求. 以后专门就 (ii) 的过程进行说明.

再一次考虑作为基础逻辑的 Laleph-1 中的蕴涵. 将(14)式改写一下，则

$$r = (1 - p + q) \wedge 1 \tag{27}$$

其中

$$r \triangleq |P \to Q|,\ p \triangleq |P|,\ q \triangleq |Q|$$

在(27)式中，若给出 p 和 r 的值，就可以考虑如下的映射:

$$f: V \times V \to S \subset 2^V \tag{28}$$

$$f(p, r) = \begin{cases} [p, 1] & \text{当 } r = 1 \\ p + r - 1 & \text{当 } 0 \leqslant p + r - 1 \leqslant 1 \quad r \neq 1 \\ \varnothing & \text{其他} \end{cases} \tag{29}$$

其中，2^V 表示 V 的幂集合，ϕ 表示空集合.

那么，根据对任意的 $q \in V$ 的 f^{-1}，所作的 $V \times V$ 的逆象为

$$f^{-1}(q) = \{(p, r) \in V \times V \mid q \in f(p, r)\} \tag{30}$$

若对上述的 f，应用扩张原理，则对于给出的 $\underline{P}$，$\underline{R}(\triangleq \underline{P \to Q})$，得到下式

$$\mu\underline{Q}(q) = \sup_{(p,q) \in f^{-1}(q)} (\mu\underline{P}(p) \wedge \mu\underline{R}(r)) \tag{31}$$

这里，为使下面的讨论简单起见，提出两个定义和假定. 设 τ 为某语言真值.

定义 1 所谓 τ 可能是真的，就是

$$\mu_\tau(1) = 1$$

所谓 τ 可能是假的就是

$$\mu_\tau(0) = 1$$

例如，所谓未知的 LTV，就是既可能是真的，也可能是假

的.

定义 2 若Π的 LTV 即$\underline{\Pi}$总是未知的，则称Π为伪命题.

在(31)式中，假定$\underline{R}$是真的而且是凸的，$\underline{P}$ 是正规的而且是凸的. 这时 $\underline{P}$ 与$\underline{R}$的 α-水平集合可记为

$$\underline{P_\alpha} = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)], \underline{R}_\alpha = [r_1(\alpha), 1] \alpha \in (0, 1]$$

根据 (30)，(31) 式经简单计算，便得到有关$\underline{Q}$的如下结果:

$$\underline{Q}_\alpha = [(p_1 + r_1 - 1) \vee 0, 1] \alpha \in (0, 1] \tag{32}$$

在上式中，p_1 是 $p_1(\alpha)$ 的简写形式，以后只要不会引起混淆，就做这种省略.

将上面归纳一下，得到下面简单的表示:

给定 $\underline{P}$ 和 $\underline{R}(\triangleq \underline{P \to Q})$，满足上述假定时，则

$$Q = (\neg(R \to (\neg P)))\text{OR } \Pi \tag{33}$$

上式中的$\neg$，OR，$\to$ 等运算法则服从 (20)，(22)，(23) 式.

(33)式与(32)式是等价的，只要将右边的 α-水平集合计算一下，就能够很容易地确认这一点.

迄今，将 Laleph-1 中的蕴涵已作为基础使用了，与此相应的，若采用以 (15)—(17) 式所下的定义，可以作同样的讨论. 在与上面同样假定的条件下，可得到下面的结果:

对于 $\alpha \in (0, 1]$，有

$$(15)\text{式，高格恩:}\ \underline{Q}_\alpha = [p_1 \times r_1, 1] \tag{34}$$

$$(16)\text{式，哥德尔:}\ \underline{Q}_\alpha = [p_1 \wedge r_1, 1] \tag{35}$$

$$(17)\text{式，迪涅斯:}\ \underline{Q}_\alpha = \begin{cases} [0, 1] & \text{当 } p_1 + r_1 \leqslant 1 \\ [r_1, 1] & \text{其他} \end{cases} \tag{36}$$

在上面的四个公式中，最后的 (36) 式当作 F 推理还没有使用. 为什么呢? 这是因为，例如若$\underline{R}$完全真实时，则 $r_1 = 1$，

$\forall_\alpha \in (0, 1]$，若 P 较未知既使稍微接近真实时，则结论 $\underline{Q}$ 就成为完全真实的了．当然，还原为 2 值逻辑时，四个公式全都成为相同的了．

关于 (32)，(34)，(35) 式之间的关系顺便指出两点：首先，在 Q_α 的下限值之间，可知有下面的关系：

$$(p_1 + r_1 - 1) \vee 0 \leqslant p_1 \times r_1 \leqslant p_1 \wedge r_1 \qquad (37)$$

即可知从 Laleph-1 的模糊化得到的推理法，成为最保守的推理法．再一个有趣之点是在无限值逻辑中，将逻辑 $\underline{\text{AND}}$ 适当地改变其定义，上面的三个 F 推理用一个表示就可以，亦即同 (33) 式那样的形式，可写为：

$$Q = (P \ \underline{\text{AND}} \ R) OR \Pi \qquad (38)$$

其中，$\underline{\text{AND}}$ 的意义是：在 Laleph-1 中是黑体的逻辑乘积 ($|P\mathbf{AND}R| \triangleq (p + r - 1) \vee 0$)，在高格恩中是相互制约的逻辑乘积 ($|P < \text{AND} > R| \triangleq p \times r$)，在哥德尔中是非相互制约的逻辑乘积 ($|P \ \text{AND} \ R| \triangleq p \wedge r$)．

这样一来，按照(38)式，可以记述在本节的开头所叙述过的 (ii) 的推理过程．不过，由于将基础逻辑用于什么而多少有差异．所以在本文中，决定采用 (33) 式，即 Laleph-1 的模糊化的情形．

在转到例题之前，只说一下 F 否定后件的假言推理的情形的结果．

Q 和 $R(\triangleq P \rightarrow Q)$ 的真值度用 LTV 给出，设 $\underline{Q}$ 是正规凸的，$\underline{R}$ 可能是真实的且凸的时候，则蕴涵中前提的真值度可表示如下：

$$P = (R \rightarrow Q) \text{AND} \Pi \qquad (39)$$

其中，→、AND 的运算服从 (23) 和 (21) 式．

在上面的讨论中，蕴涵自身的 LTV 是采用所谓“可能是真实的”这个假定，但这个假定不是很强的假定．之所以这样

说，是因为人们利用蕴涵进行推理时，最低限度要采用有真实可能性的蕴涵。

§5. 模糊推理举例

现在，考虑下面的F命题：

$$P_1 \triangleq \text{“}u_1\text{ 是小的”}$$

$$Q_1 \triangleq \text{“}u_2\text{ 是大的”}$$

假定其中，小的和大的如图 A 中的 S^* 和 L^*，它们是将 [1，9] 作为全集的模糊集合．而且预先带有下面模糊的知识：

$$R \triangleq \text{“}P_1 \rightarrow Q_1\text{”}$$

$$\underline{R} = \text{非常非常真实}$$

在这里，假定得到了 $P_2 \triangleq$“u_1 是很小的”的信息．这时关于 u_2 该是怎样的说法呢？

作为上面问题的解，我们最好是说 $Q_2 \triangleq$“u_2 是L”(其中，L是 [1，9] 的F集合)．也就是求这样的F集合L。

应用前节的F推理可如下求解。

首先，根据(10)式，有

$$\underline{P}_1 = \mu S^*(S) \tag{40}$$

其中 S 是 P_2 的F集合，在这个问题里，指的是非常小．由 $\underline{P}_1$ 和 $\underline{R}$，按 (33) 式得 $\underline{Q}_1$ (参照图 A 的左端)．由 $\underline{Q}_1$ 和 Q_1，按 (8)式得

$$L = \int_U \mu\underline{Q}(\mu L^*(u))/u \tag{41}$$

其中 U 是 [1，9]．这样，我们就可以说，“u_2 是大的”．

同样，作为 P_2，在获得像“u_1 是比较小的”、“u_1 是大的”、“u_1 是 4 左右”这样的信息时，作为 Q_2，则“说 u_2 是大的而不是小的”、“u_2 是完全可能的”、u_2 不是很小的等表述就分别成为能够进行演绎的推理。

作为F推理方法，要评价什么是有价值的，则是一个相当困难的问题。若表现的愈是模糊，则它的真实性愈高，但其他方面的意义却变小了。相反，其它的表现，模糊程度是极小的，而其真实性是很低的。因而在具有相当模糊化程度的情况下，大概它是应当从所谓通讯效率的观点来讨论的。在应用

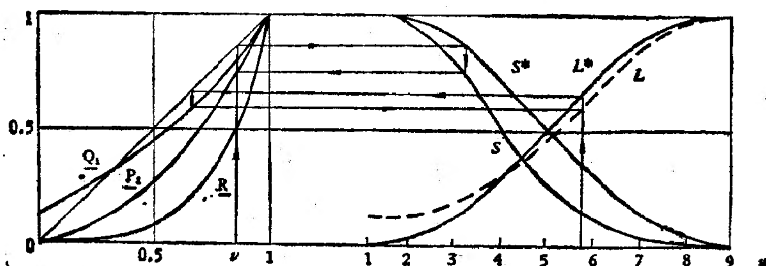


图 A

前述蕴涵的F推理中，很有价值的性质是，在 $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{P}, \underline{P \to Q})$ 中，(1) $\underline{P}$ 或者 $\underline{P \to Q}$ 愈高，则 $\underline{Q}$ 愈高，(2) 随着 $\underline{P}$ 变低，结论的模糊性增大。这种性质在形式化的系统中，将被怎样地表现出来，理解这一点是很重要的。

§6. 结 束 语

作为模糊推理的一般介绍，必须提到由文献 Zadeh[3] 所叙述的形式化了的推理构成规则。这是扩张了的三段论法，是迄今为止的模糊论证方法中最重要的方法。例如，可表述如下：

u_1 是小的，

u_1 和 u_2 是近似相等的

u_2 = 小的∘近似相等的≅比较小

其中“∘”是 max (极大)和 min (极小)的合成。

这个F推理，是用所谓模糊关系式来表示的，可以非常容易地进行计算．在上述的推理中，从结论u_2的F集合和(u_1和u_2)的F关系，求u_1的F集合的情形，便成为模糊关系式的逆问题，其解法已由桑切兹（Sanchez）等所写的文献[14，15，16]给出．这也是稍稍复杂的F推理之一．

查德也是把肯定前件的假言推理的扩张，作为推理构成规则的特殊情形来处理的，但由于是查德自己指出的那里有问题[3的第III部分]，故这里不进行论述了．

本文只涉及到了模糊推理方法的一个侧面．可以说这个领域未解决的问题多数还处于研究阶段．虽然不能期望现存语言都逻辑化，但掌握能够处理自然语言中很小一部分的逻辑(模糊逻辑)来说，其作用是很大的．

最后，希望对模糊推理有兴趣的读者，读一读B. R. 盖涅斯出色的综述论文《模糊论证基础》(Foundations of Fuzzy Reasoning[17])．在最新的论文中，请参考菅野写的解说[18]．

参 考 文 献

[1] B. R. Gaines, "Fuzzy and propability uncertainty logic", *Information and Control 38*, 154—169(1978)

[2] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets",*Information and Gontrol*, 8, 3, 338—353, (1965)

[3] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", *Information Sciences*, 8, 199—249 8,301—357, 9, 43—80(1975)

[4] R. Giles, "Lukasiewicz logic and fuzzy set theory", *Int. J. Man-Machine Studies*, 6, 313—327(1976)

[5] J. A. Goguen, "The logic of inexact concepts", *Synthese*, 19, 323—373(1968—1969)

[6] 西脇,「暧昧さの論理」,科学基礎論研究, Vol. 13, No. 4, 17—24(1978)

[7] L.A.Zadeh, "Fuzzy logic and approximate reasoning", *Synthese*,30, 407—428(1975)

[8] L. A. Zadeh, "An fuzzy-algorithmic approach to the definition of

complex and imprecise concept", *Int. J. Man-Machine Studies*, 8, 249—291(1976)

[9] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets & Systems*, 1,3—28(1978)

[10] L.A.Zadeh, "PRUF and its applications to inference from fizzy proposition", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, New Orleans (1977)

[11] Y. Tsukamoto, "An approach to fuzzy reasoning method", in *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*,edited by M.M. Gupta et al, North Holland, (1979) (to appear)

[12] E. Sanchez,"On truth-qualification in natural languages", *Proc. Int. Conf. on Cybernetics & Society*, 2, 1233—1236, Tokyo (1978)

[13] N. Rescher, *Many-Vatued Logic*, McGRAW-HILL (1969)

[14] E. Sanchez, "Resolution of composite fuzzy relation equations", *Information & Control*, 30, 38—48 (1976)

[15] T. Tashiro, T. Terano and Y. Tsukamoto, "Inverse of fuzzy correspondence and evolutionary diagnosis", *Proc. Int. Con. on Cybernetics and Society*, 2,938—941,Tokyo(1978)

[16] 塚本，田代「Fuzzy 逆问題の解法」、计测自動制御学会论文集，Vol.15, No. 1,21—25(1979)

[17] B.R. Gaines, "Foundations of fuzzy reasoning", *Int. J. of Man-Machine Studies*, 9, 1—68(1977)

[18] 菅野，「あいまい集合と論理の制御への応用」計測と制御，Vol.18, No. 2,8—18(1979)